

13. Vizsgafeladatok

Kommunikációs hálózatok teljesítményének elemzése

Horváth Illés

2024/12/04

A feladatsor kis kérdések

1. Mit jelent, hogy egy Markov-lánc irreducibilis?

A feladatsor kis kérdések

1. Mit jelent, hogy egy Markov-lánc irreducibilis?

Bármelyik állapotból el tud jutni bármelyik másik állapotba véges sok lépésben.

A feladatsor kis kérdések

1. Mit jelent, hogy egy Markov-lánc irreducibilis?

Bármelyik állapotból el tud jutni bármelyik másik állapotba véges sok lépésben.

2. Egy M/M/c sor érkezési rátája λ , egy szál kiszolgálási rátája μ . Mi a sor stabilitásának feltétele?

A feladatsor kis kérdések

1. Mit jelent, hogy egy Markov-lánc irreducibilis?

Bármelyik állapotból el tud jutni bármelyik másik állapotba véges sok lépésben.

2. Egy M/M/c sor érkezési rátája λ , egy szál kiszolgálási rátája μ . Mi a sor stabilitásának feltétele?

$$\frac{\lambda}{c\mu} < 1.$$

A feladatsor kis kérdések

1. Mit jelent, hogy egy Markov-lánc irreducibilis?

Bármelyik állapotból el tud jutni bármelyik másik állapotba véges sok lépésben.

2. Egy M/M/c sor érkezési rátája λ , egy szál kiszolgálási rátája μ . Mi a sor stabilitásának feltétele?

$$\frac{\lambda}{c\mu} < 1.$$

3. Mit jelent a Processor Sharing?

A feladatsor kis kérdések

1. Mit jelent, hogy egy Markov-lánc irreducibilis?

Bármelyik állapotból el tud jutni bármelyik másik állapotba véges sok lépésben.

2. Egy M/M/c sor érkezési rátája λ , egy szál kiszolgálási rátája μ . Mi a sor stabilitásának feltétele?

$$\frac{\lambda}{c\mu} < 1.$$

3. Mit jelent a Processor Sharing?

Amikor egy szerver a kiszolgáló kapacitását megosztja az összes bufferben lévő igény között.

Kis kérdések

4. Hogyan működik a Join-Below-Threshold (JBT) terheléelosztási elv?

4. Hogyan működik a Join-Below-Threshold (JBT) terheléelosztási elv?

Minden szervernek van egy küszöbe, ami alatt szabadnak számít, a küszöbtől kezdve foglaltnak. A diszpécser a beérkező igényt a szabad szerverek közül találomra valamelyikhez irányítja, vagy ha minden szerver foglalt, akkor találomra választ az összes közül.

Kis kérdések

4. Hogyan működik a Join-Below-Threshold (JBT) terheléelosztási elv?

Minden szervernek van egy küszöbe, ami alatt szabadnak számít, a küszöbtől kezdve foglaltnak. A diszpécser a beérkező igényt a szabad szerverek közül találomra valamelyikhez irányítja, vagy ha minden szerver foglalt, akkor találomra választ az összes közül.

5. Mit jelent a random early drop (RED)?

4. Hogyan működik a Join-Below-Threshold (JBT) terheléelosztási elv?

Minden szervernek van egy küszöbe, ami alatt szabadnak számít, a küszöbtől kezdve foglaltnak. A diszpécser a beérkező igényt a szabad szerverek közül találomra valamelyikhez irányítja, vagy ha minden szerver foglalt, akkor találomra választ az összes közül.

5. Mit jelent a random early drop (RED)?

Amikor egy szerver a buffer megtelése előtt elkezdi eldobni az igényeket.

A/6. kérdés

Egy ügyvéd egyszerre legfeljebb 2 ügyön dolgozik. Átlagosan 2 havonta kap új ügyre felkérést, amit akkor vállal el, ha éppen 0 vagy 1 ügyön dolgozik. Egy ügy átlagosan 2 hónapig tart. Minden egyes ügyért, amin dolgozik, naponta 90000 forintot számláz ki.

- (a) Jelölje X_t azt, hogy a t időpontban hány ügyön dolgozik. Mit kell még feltenni a megadott információkon kívül, hogy X_t folytonos idejű Markov-lánc legyen? Adjuk meg az állapotokat és a generátort. Figyeljünk a rátákra!
- (b) Most éppen 2 ügyön dolgozik. Becsüljük meg annak az esélyét, hogy 3 nap múlva 1 ügyön fog dolgozni. (3 napot tekintünk $1/10$ hónapnak.)
- (c) Hosszú távon mennyi az átlagos napi bevétele?

A/6. kérdés

Megoldás.

- (a) X_t lehetséges állapotai 0, 1, 2. Ha az ügyek Poisson-folyamat szerint érkeznek (azaz az érkezési időközök független, exponenciális eloszlásúak) és az egyes ügyek hossza is exponenciális eloszlású, akkor X_t folytonos idejű Markov-lánc.

A/6. kérdés

Megoldás.

- (a) X_t lehetséges állapotai 0, 1, 2. Ha az ügyek Poisson-folyamat szerint érkeznek (azaz az érkezési időközök független, exponenciális eloszlásúak) és az egyes ügyek hossza is exponenciális eloszlású, akkor X_t folytonos idejű Markov-lánc.

A generátor

$$Q = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix};$$

mivel egy ügy átlagos hossza 2 hónap, ezért egy ügy befejezési rátája $1/2$, viszont amikor 2 ügyön is dolgozik, akkor annak a rátája, hogy valamelyiket befejezi, $2 \times 1/2 = 1$.

A/6. kérdés

- (b) Most éppen 2 ügyön dolgozik. Becsüljük meg annak az esélyét, hogy 3 nap múlva 1 ügyön fog dolgozni. (3 napot tekintünk $1/10$ hónapnak.)

A/6. kérdés

- (b) Most éppen 2 ügyön dolgozik. Becsüljük meg annak az esélyét, hogy 3 nap múlva 1 ügyön fog dolgozni. (3 napot tekintünk $1/10$ hónapnak.) Megoldás. Ha most épp 2 ügyön dolgozik, akkor $v(0) = (0 \ 0 \ 1)$.

Rövid távú közelítést alkalmazunk:

$$\begin{aligned} v(1/10) &= v(0)e^{Q/10} \approx v(0)(I + Q/10) = \\ &= (0 \ 0 \ 1) \begin{bmatrix} 19/20 & 1/20 & 0 \\ 1/20 & 18/20 & 1/20 \\ 0 & 1/10 & 9/10 \end{bmatrix} = (0 \ 1/10 \ 9/10), \end{aligned}$$

így annak a valószínűsége, hogy 3 nap múlva 1 ügyön fog dolgozni, megközelítőleg $1/10$.

A/6. kérdés

1. Hosszú távon mennyi az átlagos napi bevétele?

A/6. kérdés

1. Hosszú távon mennyi az átlagos napi bevétele?

Először kiszámítjuk a Markov-lánc $v_{\text{st}} = (x_0 \ x_1 \ x_2)$ stacionárius eloszlását. Ezt lehet a dinamikus egyensúly egyenletekből:

$$1/2x_0 = 1/2x_1, \quad 1/2x_1 = x_2, \quad x_0 + x_1 + x_2 = 1,$$

A/6. kérdés

1. Hosszú távon mennyi az átlagos napi bevétele?

Először kiszámítjuk a Markov-lánc $v_{\text{st}} = (x_0 \ x_1 \ x_2)$ stacionárius eloszlását. Ezt lehet a dinamikus egyensúly egyenletekből:

$$1/2x_0 = 1/2x_1, \quad 1/2x_1 = x_2, \quad x_0 + x_1 + x_2 = 1,$$

ahonnan

$$v_{\text{st}} = (0.4 \ 0.4 \ 0.2).$$

A/6. kérdés

1. Hosszú távon mennyi az átlagos napi bevétele?

Először kiszámítjuk a Markov-lánc $v_{st} = (x_0 \ x_1 \ x_2)$ stacionárius eloszlását. Ezt lehet a dinamikus egyensúly egyenletekből:

$$1/2x_0 = 1/2x_1, \quad 1/2x_1 = x_2, \quad x_0 + x_1 + x_2 = 1,$$

ahonnan

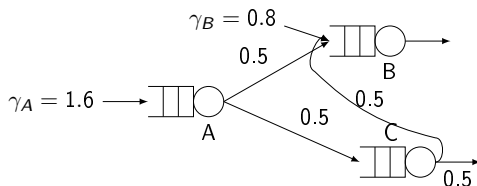
$$v_{st} = (0.4 \ 0.4 \ 0.2).$$

A hosszú távú átlagos napi bevétele az ergodtétel alapján forintban

$$0.4 \times 0 + 0.4 \times 90000 + 0.2 \times 180000 = 72000.$$

A/7. kérdés

Az alábbi hálózatban mindhárom szerver FIFO, a kiszolgálási rátájuk rendre $\mu_A = 2$, $\mu_B = 3$, $\mu_C = 1$.



- (a) Stabil-e a hálózat? Aciklikus-e a hálózat?
- (b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?
- (c) Egy kívülről B-be beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?

A/7. feladat

Megoldás.

- (a) A hálózat aciklikus, A, C, B sorrendben véve a szervereket. Az egyes szerverek beérkezési rátája így sorban expliciten számolható:

$$\lambda_A = \gamma_A = 1.6,$$

$$\lambda_C = 0.5 \cdot \lambda_A = 0.8,$$

$$\lambda_B = \gamma_B + 0.5\lambda_A + 0.5\lambda_C = 0.8 + 0.8 + 0.4 = 2.0.$$

A/7. feladat

Megoldás.

- (a) A hálózat aciklikus, A, C, B sorrendben véve a szervereket. Az egyes szerverek beérkezési rátája így sorban expliciten számolható:

$$\lambda_A = \gamma_A = 1.6,$$

$$\lambda_C = 0.5 \cdot \lambda_A = 0.8,$$

$$\lambda_B = \gamma_B + 0.5\lambda_A + 0.5\lambda_C = 0.8 + 0.8 + 0.4 = 2.0.$$

A stabilitás feltétele:

$$\lambda_A = 1.6 < \mu_A = 2.0,$$

$$\lambda_C = 0.8 < \mu_C = 1.0,$$

$$\lambda_B = 2.0 < \mu_B = 3.0$$

teljesül, így a hálózat stabil.

A/7. feladat

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

A/7. feladat

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

Megoldás.

$$\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 1.6 / 2.0 = 0.8,$$

$$\rho_C = \lambda_C / \mu_C = 0.8 / 1.0 = 0.8,$$

$$\rho_B = \lambda_B / \mu_C = 2.0 / 3.0 = 0.667.$$

A/7. feladat

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

Megoldás.

$$\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 1.6 / 2.0 = 0.8,$$

$$\rho_C = \lambda_C / \mu_C = 0.8 / 1.0 = 0.8,$$

$$\rho_B = \lambda_B / \mu_C = 2.0 / 3.0 = 0.667.$$

(c) Egy kívülről B-be beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?

A/7. feladat

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

Megoldás.

$$\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 1.6 / 2.0 = 0.8,$$

$$\rho_C = \lambda_C / \mu_C = 0.8 / 1.0 = 0.8,$$

$$\rho_B = \lambda_B / \mu_C = 2.0 / 3.0 = 0.667.$$

(c) Egy kívülről B-be beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?

Megoldás. Egy kívülről B-be érkező igény csak a B szerverben tölt el időt. A B szerver sora M/M/1 típusú, így az átlagos sorban töltött idő

$$\frac{1}{\mu_B - \lambda_B} = \frac{1}{3.0 - 2.0} = 1.$$

A/8. kérdés

Adott egy $C = 6$ kapacitású fluid csatorna. Kétféle forgalmi osztályból markovi módon érkeznek fix sávszélességű (constant bit rate, CBR) forgalmak; az i -edik osztályból az érkezési ráta λ_i , a távozási ráta μ_i , egy forgalom sávszélessége c_i . A két forgalmi osztály jellemzői:

$$c_1 = 2, \lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, \quad c_2 = 3, \lambda_2 = 1, \mu_2 = 2.$$

1. Mekkora a csatornában a forgalom hosszú távú átlaga?
2. Az idő mekkora részében van a csatorna teljesen kihasználva?

A/8. kérdés

Megoldás. Kaufman–Roberts algoritmust használunk: Ekkor a rekurzió alapján

$$\tilde{v}(0) = 1,$$

$$\tilde{v}(1) = 0,$$

$$\tilde{v}(2) = \frac{\lambda_1 c_1}{\mu_1 \cdot 2} \tilde{v}(0) = \frac{2}{2} \cdot 1 = 1,$$

$$\tilde{v}(3) = \frac{\lambda_1 c_1}{\mu_1 \cdot 3} \tilde{v}(1) + \frac{\lambda_2 c_2}{\mu_2 \cdot 3} \tilde{v}(0) = \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{3}{2 \cdot 3} \cdot 1 = 1/2,$$

$$\tilde{v}(4) = \frac{\lambda_1 c_1}{\mu_1 \cdot 4} \tilde{v}(2) + \frac{\lambda_2 c_2}{\mu_2 \cdot 4} \tilde{v}(1) = \frac{2}{4} \cdot 1 + \frac{3}{2 \cdot 4} \cdot 0 = 1/2,$$

$$\tilde{v}(5) = \frac{\lambda_1 c_1}{\mu_1 \cdot 5} \tilde{v}(3) + \frac{\lambda_2 c_2}{\mu_2 \cdot 5} \tilde{v}(2) = \frac{2}{5} \cdot 1/2 + \frac{3}{2 \cdot 5} \cdot 1 = 1/2,$$

$$\tilde{v}(6) = \frac{\lambda_1 c_1}{\mu_1 \cdot 6} \tilde{v}(4) + \frac{\lambda_2 c_2}{\mu_2 \cdot 6} \tilde{v}(3) = \frac{2}{6} \cdot 1/2 + \frac{3}{2 \cdot 6} \cdot 1/2 = 3/8.$$

A/8. kérdés

A $\tilde{v}(i)$ értékeket leosztva az összegükkel:

$$v_{\text{st}}(0) = 8/31,$$

$$v_{\text{st}}(1) = 0,$$

$$v_{\text{st}}(2) = 8/31,$$

$$v_{\text{st}}(3) = 4/31,$$

$$v_{\text{st}}(4) = 4/31,$$

$$v_{\text{st}}(5) = 4/31,$$

$$v_{\text{st}}(6) = 3/31.$$

A/8. kérdés

A $\tilde{v}(i)$ értékeket leosztva az összegükkel:

$$v_{\text{st}}(0) = 8/31,$$

$$v_{\text{st}}(1) = 0,$$

$$v_{\text{st}}(2) = 8/31,$$

$$v_{\text{st}}(3) = 4/31,$$

$$v_{\text{st}}(4) = 4/31,$$

$$v_{\text{st}}(5) = 4/31,$$

$$v_{\text{st}}(6) = 3/31.$$

A csatornában a forgalom hosszú távú átlaga

$$0 \cdot v_{\text{st}}(0) + 1 \cdot v_{\text{st}}(0) + \cdots + 6 \cdot v_{\text{st}}(6) = 79/31.$$

A/8. kérdés

A $\tilde{v}(i)$ értékeket leosztva az összegükkel:

$$v_{\text{st}}(0) = 8/31,$$

$$v_{\text{st}}(1) = 0,$$

$$v_{\text{st}}(2) = 8/31,$$

$$v_{\text{st}}(3) = 4/31,$$

$$v_{\text{st}}(4) = 4/31,$$

$$v_{\text{st}}(5) = 4/31,$$

$$v_{\text{st}}(6) = 3/31.$$

A csatornában a forgalom hosszú távú átlaga

$$0 \cdot v_{\text{st}}(0) + 1 \cdot v_{\text{st}}(0) + \cdots + 6 \cdot v_{\text{st}}(6) = 79/31.$$

Az idő $v_{\text{st}}(6) = 3/31$ részében van a csatorna teljesen kihasználva.

B feladatsor kis kérdések

1. Definiáljuk az ON-OFF forgalmat.

B feladatsor kis kérdések

1. Definiáljuk az ON-OFF forgalmat.

Egy ON-OFF forgalom ON állapotban fix pozitív sávszélességgel ad, OFF állapotban 0 sávszélességgel ad, és a két állapot között váltakozik.

B feladatsor kis kérdések

1. Definiáljuk az ON-OFF forgalmat.

Egy ON-OFF forgalom ON állapotban fix pozitív sávszélességgel ad, OFF állapotban 0 sávszélességgel ad, és a két állapot között váltakozik.

2. Mondjuk ki a Burke-tételt.

B feladatsor kis kérdések

1. Definiáljuk az ON-OFF forgalmat.

Egy ON-OFF forgalom ON állapotban fix pozitív sávszélességgel ad, OFF állapotban 0 sávszélességgel ad, és a két állapot között váltakozik.

2. Mondjuk ki a Burke-tételt.

Egy λ érkezési rátájú, stabil, stacionárius $M/M/1$, $M/M/c$ vagy $M/M/\infty$ sor kimenő folyamata λ paraméterű Poisson-pontfolyamat.

B feladatsor kis kérdések

1. Definiáljuk az ON-OFF forgalmat.

Egy ON-OFF forgalom ON állapotban fix pozitív sávszélességgel ad, OFF állapotban 0 sávszélességgel ad, és a két állapot között váltakozik.

2. Mondjuk ki a Burke-tételt.

Egy λ érkezési rátájú, stabil, stacionárius $M/M/1$, $M/M/c$ vagy $M/M/\infty$ sor kimenő folyamata λ paraméterű Poisson-pontfolyamat.

3. Definiáljuk a hiperexponenciális eloszlást (akár absztrakt definícióval, akár sűrűségfüggvény megadásával).

B feladatsor kis kérdések

1. Definiáljuk az ON-OFF forgalmat.

Egy ON-OFF forgalom ON állapotban fix pozitív sávszélességgel ad, OFF állapotban 0 sávszélességgel ad, és a két állapot között váltakozik.

2. Mondjuk ki a Burke-tételt.

Egy λ érkezési rátájú, stabil, stacionárius $M/M/1$, $M/M/c$ vagy $M/M/\infty$ sor kimenő folyamata λ paraméterű Poisson-pontfolyamat.

3. Definiáljuk a hiperexponenciális eloszlást (akár absztrakt definícióval, akár sűrűségfüggvény megadásával).

Exponenciális eloszlások keveréke.

B feladatsor kis kérdések

1. Definiáljuk az ON-OFF forgalmat.

Egy ON-OFF forgalom ON állapotban fix pozitív sávszélességgel ad, OFF állapotban 0 sávszélességgel ad, és a két állapot között váltakozik.

2. Mondjuk ki a Burke-tételt.

Egy λ érkezési rátájú, stabil, stacionárius M/M/1, M/M/c vagy M/M/ ∞ sor kimenő folyamata λ paraméterű Poisson-pontfolyamat.

3. Definiáljuk a hiperexponenciális eloszlást (akár absztrakt definícióval, akár sűrűségfüggvény megadásával).

Exponenciális eloszlások keveréke. VAGY sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \sum_{i=1}^n p_i \lambda_i e^{-\lambda_i x},$$

ahol $\lambda_i > 0$, $p_i \geq 0$ és $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.

B feladatsor kis kérdések

4. Definiáljuk az A és B mátrixok Kronecker-szorzatát.

B feladatsor kis kérdések

4. Definiáljuk az A és B mátrixok Kronecker-szorzatát.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix}.$$

B feladatsor kis kérdések

4. Definiáljuk az A és B mátrixok Kronecker-szorzatát.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix}.$$

5. Mi az a token bucket és hogyan működik?

B feladatsor kis kérdések

4. Definiáljuk az A és B mátrixok Kronecker-szorzatát.

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \dots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \dots & a_{2n}B \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \dots & a_{nn}B \end{bmatrix}.$$

5. Mi az a token bucket és hogyan működik?

A token bucket egy forgalomkorlátozó eszköz. A token bucketben folyamatosan gyűlnek a tokenek fix rátával, maximum a token bucket méretéig. Minden, a csatornán átmenő forgalomnak el kell használnia a forgalom méretének megfelelő mennyiségű token.

Az ügyfelek sorban állnak egy hivatalban. Egy ügyfél kiszolgálása átlagosan 3 percig tart, a többiek addig várakoznak. Átlagosan 5 percenként érkezik egy ügyfél. Ha legalább 3-an állnak sorban (beleértve azt is, akit éppen kiszolgálunk), akkor a további érkezők egyből távoznak és nem jönnek vissza.

- (a) Modellezzük a sor hosszát folytonos idejű Markov-lánccal. Mit kell feltenni, hogy teljesüljön a Markov-tulajdonság? Mik a lehetséges állapotok? Nevezzük meg a sor pontos típusát.
- (b) Az idő mekkora részében nincs ügyfél a hivatalban?
- (c) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a hivatalban (beleértve a várakozást és a kiszolgálást is)?

B/6. feladat

Megoldás.

- (a) Ha az ügyfelek Poisson-folyamat szerint érkeznek (azaz az érkezési időközök független, exponenciális eloszlásúak) és a kiszolgálási idő is exponenciális eloszlású, akkor a sor hossza folytonos idejű Markov-lánc. A lehetséges állapotok 0, 1, 2, 3. Ez egy M/M/1/3 sor.

B/6. feladat

Megoldás.

- (a) Ha az ügyfelek Poisson-folyamat szerint érkeznek (azaz az érkezési időközök független, exponenciális eloszlásúak) és a kiszolgálási idő is exponenciális eloszlású, akkor a sor hossza folytonos idejű Markov-lánc. A lehetséges állapotok 0, 1, 2, 3. Ez egy M/M/1/3 sor.
- (b) Kiszámítjuk a $v_{st} = (x_0 \ x_1 \ x_2 \ x_3)$ stacionárius eloszlást. Lehet a dinamikus egyensúly egyenletek alapján; az érkezési ráta $\lambda = 1/5$, a kiszolgálási ráta $\mu = 1/3$.

$$\begin{aligned} 1/5 x_0 &= 1/3 x_1, & 1/5 x_1 &= 1/3 x_2, & 1/5 x_2 &= 1/3 x_3, \\ x_0 + x_1 + x_2 + x_3 &= 1, \end{aligned}$$

ahonnan

$$v_{st} = \left(\frac{125}{272} \ \frac{75}{272} \ \frac{45}{272} \ \frac{27}{272} \right) \approx (0.460 \ 0.276 \ 0.165 \ 0.099),$$

így az idő 46%-ában nincs ügyfél a hivatalban.

B/6. feladat

Megoldás.

- (b) Egyébként az $M/M/1/K$ sor stacionárius eloszlása $TPGEO(K, 1 - \rho)$.

B/6. feladat

Megoldás.

- (b) Egyébként az $M/M/1/K$ sor stacionárius eloszlása $TPGEO(K, 1 - \rho)$.
- (c) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a hivatalban (beleértve a várakozást és a kiszolgálást is)?

B/6. feladat

Megoldás.

- (b) Egyébként az $M/M/1/K$ sor stacionárius eloszlása $\text{TPGEO}(K, 1 - \rho)$.
- (c) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a hivatalban (beleértve a várakozást és a kiszolgálást is)? PASTA-elv miatt egy véletlen igény érkezéskor a stacionárius sorhosszt látja. Ha tele van a hivatal, akkor nem kerül be a rendszerbe. Ha bekerül, és az i -edik helyre, akkor átlagosan $i/\mu = 3i$ percet tölt a hivatalban, így

$$W = \frac{x_0}{x_0 + x_1 + x_2} \cdot 3 \cdot 1 + \frac{x_1}{x_0 + x_1 + x_2} \cdot 3 \cdot 2 + \frac{x_2}{x_0 + x_1 + x_2} \cdot 3 \cdot 3 \approx 4.522.$$

B/7. feladat

Egy fluid szerver kiszolgálási sebessége 4 Mbps, és a szerverhez végtelen buffer tartozik. A szerverbe egy ON/OFF fluid forgalom érkezik, mely 3/s rátával kikapcsol, illetve 1/s rátával bekapcsol; amikor ad, akkor a sebessége 8 Mbps.

- (a) Stabil-e a sor?
- (b) Számítsuk ki az átlagos buffer szintet.
- (c) Mennyi a forgalom átlagos késleltetése?

Az ON/OFF fluid buffer stacionárius eloszlásának képlete a következő:

$$\begin{aligned}f_1(x) &= \frac{q_{21}}{q_{12} + q_{21}} \left(\frac{q_{12}}{\lambda - \mu} - \frac{q_{21}}{\mu} \right) e^{-\left(\frac{q_{12}}{\lambda - \mu} - \frac{q_{21}}{\mu} \right) x}, \\f_2(x) &= \frac{q_{21}}{q_{12} + q_{21}} \frac{q_{12}\mu - q_{21}(\lambda - \mu)}{\mu^2} e^{-\left(\frac{q_{12}}{\lambda - \mu} - \frac{q_{21}}{\mu} \right) x}, \\ \ell_1 &= 0, \quad \ell_2 = \frac{q_{12}\mu - q_{21}(\lambda - \mu)}{(q_{12} + q_{21})\mu}.\end{aligned}$$

Megoldás.

- (a) (Az ON állapot az 1-es, az OFF állapot a 2-es.) A háttér-folyamat stacionárius eloszlása

$$\pi = \left(\frac{q_{21}}{q_{12} + q_{21}} \quad \frac{q_{12}}{q_{12} + q_{21}} \right) = (0.25 \ 0.75).$$

A stabilitás feltétele

$$0.25 \times 8 + 0.75 \cdot 0 = 2 < \mu = 4,$$

ami teljesül, így a sor stabil.

B/7. feladat

(b) Számítsuk ki az átlagos buffer szintet.

B/7. feladat

(b) Számítsuk ki az átlagos buffer szintet.

Megoldás. A buffer szint stacionárius eloszlása

$$f_1(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{8-4} - \frac{1}{4} \right) e^{-\left(\frac{3}{8-4} - \frac{1}{4}\right)x} = \frac{1}{8} e^{-x/2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3 \cdot 4 - 1 \cdot (8-4)}{4^2} e^{-\left(\frac{3}{8-4} - \frac{1}{4}\right)x} = \frac{1}{8} e^{-x/2},$$

$$\ell_1 = 0,$$

$$\ell_2 = \frac{3 \cdot 4 - 1 \cdot (8-4)}{(1+3) \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

B/7. feladat

(b) Számítsuk ki az átlagos buffer szintet.

Megoldás. A buffer szint stacionárius eloszlása

$$f_1(x) = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{8-4} - \frac{1}{4} \right) e^{-(\frac{3}{8-4} - \frac{1}{4})x} = \frac{1}{8} e^{-x/2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3 \cdot 4 - 1 \cdot (8-4)}{4^2} e^{-(\frac{3}{8-4} - \frac{1}{4})x} = \frac{1}{8} e^{-x/2},$$

$$\ell_1 = 0,$$

$$\ell_2 = \frac{3 \cdot 4 - 1 \cdot (8-4)}{(1+3) \cdot 4} = \frac{1}{2}.$$

Az átlagos buffer szint

$$\int_0^{\infty} x f_1(x) dx + \int_0^{\infty} x f_2(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \text{ (Mbps)}.$$

B/7. feladat

(c) Mennyi a forgalom átlagos késleltetése?

B/7. feladat

(c) Mennyi a forgalom átlagos késleltetése?

Megoldás. Mivel az érkezési folyamat nem homogén, így nem teljesül a PASTA elv, egy érkező véletlen csepp nem a bufferszint stacionárius eloszlását látja.

B/7. feladat

(c) Mennyi a forgalom átlagos késleltetése?

Megoldás. Mivel az érkezési folyamat nem homogén, így nem teljesül a PASTA elv, egy érkező véletlen csepp nem a bufferszint stacionárius eloszlását látja.

Először kiszámítjuk, mekkora egy véletlen érkező csepp által érkezéskor látott bufferszint várható értéke. Az ON illetve OFF állapotban látott átlagos bufferszintet súlyozzuk az ON illetve OFF állapotbeli érkezési rátával, és osztjuk az eredő érkezési rátával:

$$\frac{\lambda \cdot \int_0^{\infty} x f_1(x) dx + 0 \cdot \int_0^{\infty} x f_2(x) dx}{\pi_1 \lambda + \pi_2 \cdot 0} = \frac{8 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/2}{1/4 \cdot 8 + 3/4 \cdot 0} = 2 \text{ (Mb)}.$$

B/7. feladat

(c) Mennyi a forgalom átlagos késleltetése?

Megoldás. Mivel az érkezési folyamat nem homogén, így nem teljesül a PASTA elv, egy érkező véletlen csepp nem a bufferszint stacionárius eloszlását látja.

Először kiszámítjuk, mekkora egy véletlen érkező csepp által érkezéskor látott bufferszint várható értéke. Az ON illetve OFF állapotban látott átlagos bufferszintet súlyozzuk az ON illetve OFF állapotbeli érkezési rátával, és osztjuk az eredő érkezési rátával:

$$\frac{\lambda \cdot \int_0^{\infty} x f_1(x) dx + 0 \cdot \int_0^{\infty} x f_2(x) dx}{\pi_1 \lambda + \pi_2 \cdot 0} = \frac{8 \cdot 1/2 + 0 \cdot 1/2}{1/4 \cdot 8 + 3/4 \cdot 0} = 2 \text{ (Mb)}.$$

Mivel a kiszolgálási sebesség konstans $\mu = 4$ (Mbps), így az átlagos késleltetés

$$\frac{2}{4} = 1/2 \text{ (s)}.$$

B/8. feladat

Egy hálózatban 3 fluid szerver van, kiszolgálási sebességük rendre 2.0, 2.5, 4.5. A hálózatban 4 különböző prioritású adaptív forgalom van jelen, csökkenő prioritási sorrendben:

- (1) az érkezési rátája 1.2, és áthalad a 2-es és 3-as szervereken;
- (2) az érkezési rátája 1.8, és áthalad mindhárom szerveren;
- (3) az érkezési rátája 1.0, és áthalad az 1-es és 3-as szervereken;
- (4) az érkezési rátája 3.5, és áthalad a 3-as szerveren.

Minden forgalomról ütközés esetén instant és tökéletes visszaszabályozást feltételezünk a hálózatba való belépési pontjukig visszamenőleg.

- (a) Számítsuk ki, melyik forgalom mekkora sebességre áll be.
- (b) Melyik szervernek mekkora a kihasználtsága?

B/8. feladat

(a) Megoldás.

Az (1) forgalom a legmagasabb prioritású, és egyik szerver sem korlátozza, tehát megkapja az 1.2 érkezési rátát, és a szervereken a még szabad kapacitás rendre 2.0, 1.3, 3.3.

B/8. feladat

(a) Megoldás.

Az (1) forgalom a legmagasabb prioritású, és egyik szerver sem korlátozza, tehát megkapja az 1.2 érkezési rátát, és a szervereken a még szabad kapacitás rendre 2.0, 1.3, 3.3.

A (2) forgalmat a második szerver korlátozza, így a visszaszabályozás miatt a forgalom sebessége 1.3, és az egyes szervereken a még szabad kapacitás rendre 0.7, 0.0, 2.0.

B/8. feladat

(a) Megoldás.

Az (1) forgalom a legmagasabb prioritású, és egyik szerver sem korlátozza, tehát megkapja az 1.2 érkezési rátát, és a szervereken a még szabad kapacitás rendre 2.0, 1.3, 3.3.

A (2) forgalmat a második szerver korlátozza, így a visszaszabályozás miatt a forgalom sebessége 1.3, és az egyes szervereken a még szabad kapacitás rendre 0.7, 0.0, 2.0.

A (3) forgalmat az első szerver korlátozza, így a sebessége 0.7, és az egyes szervereken a még szabad kapacitás rendre 0.0, 0.0, 1.3.

B/8. feladat

(a) Megoldás.

Az (1) forgalom a legmagasabb prioritású, és egyik szerver sem korlátozza, tehát megkapja az 1.2 érkezési rátát, és a szervereken a még szabad kapacitás rendre 2.0, 1.3, 3.3.

A (2) forgalmat a második szerver korlátozza, így a visszaszabályozás miatt a forgalom sebessége 1.3, és az egyes szervereken a még szabad kapacitás rendre 0.7, 0.0, 2.0.

A (3) forgalmat az első szerver korlátozza, így a sebessége 0.7, és az egyes szervereken a még szabad kapacitás rendre 0.0, 0.0, 1.3.

A (4) forgalmat a harmadik szerver korlátozza, így a sebessége 1.3, és az egyes szervereken a még szabad kapacitás rendre 0.0, 0.0, 0.0.

B/8. feladat

(a) Megoldás.

Az (1) forgalom a legmagasabb prioritású, és egyik szerver sem korlátozza, tehát megkapja az 1.2 érkezési rátát, és a szervereken a még szabad kapacitás rendre 2.0, 1.3, 3.3.

A (2) forgalmat a második szerver korlátozza, így a visszaszabályozás miatt a forgalom sebessége 1.3, és az egyes szervereken a még szabad kapacitás rendre 0.7, 0.0, 2.0.

A (3) forgalmat az első szerver korlátozza, így a sebessége 0.7, és az egyes szervereken a még szabad kapacitás rendre 0.0, 0.0, 1.3.

A (4) forgalmat a harmadik szerver korlátozza, így a sebessége 1.3, és az egyes szervereken a még szabad kapacitás rendre 0.0, 0.0, 0.0.

Mindhárom szerver kihasználtsága 100%.