

3. Little-formula, kiszolgálási idő elemzése

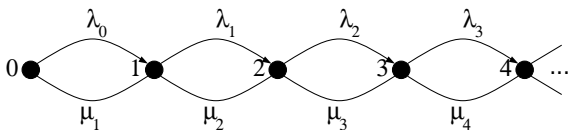
Kommunikációs hálózatok teljesítményének elemzése

Horváth Illés

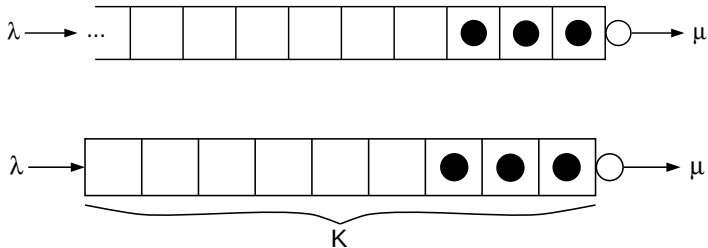
2024/09/18

Markov-sorok, M/M/1 és M/M/1/K sor

Emlékeztető: Markov-sor.



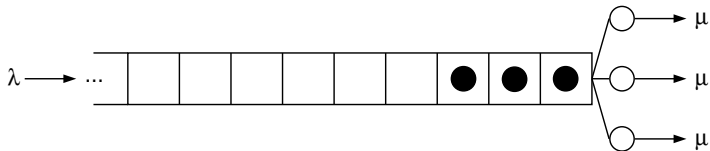
Azon belül M/M/1 és M/M/1/K sorok: 1 szerver, FIFO (érkezési sorrend szerinti) kiszolgálás.



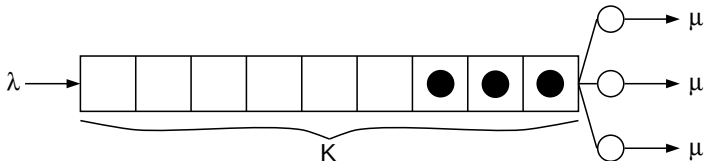
M/M/c és M/M/c/K sor

További érdekes sorok.

Az M/M/c sorban c szerver van és végtelen buffer:



Az M/M/c/K sorban pedig véges, K hosszú buffer:



Várakozási idő

Egy kiszolgáló sor teljesítményét általában az ügyfelek/igények szemszögéből mérjük.

Ennek megfelelően sorbanállási problémáknál a tipikusan használt teljesítményjellemző a *kiszolgálási idő* vagy *rendszerben töltött idő*, ami egy igénynek a sorba való beérkezés pillanatától a kiszolgálás végéig eltelt idő. Ez általában véletlenszerű; érdekes a teljes eloszlása is, de ha egyetlen számmal kell jellemezni, akkor az általában a várható értéke.

Ezt általában stacionárius rendszerekre vizsgáljuk (azaz feltesszük, hogy a rendszer hosszú ideje fut).

A korábban tárgyaltak (pl. a sorhossz stacionárius eloszlása) az átlagos várakozási időről közvetlenül nem adnak információt. Szerencsére az *átlagos* várakozási időre van egy egyszerű képlet.

Little-formula

Tétel. (Little-formula)

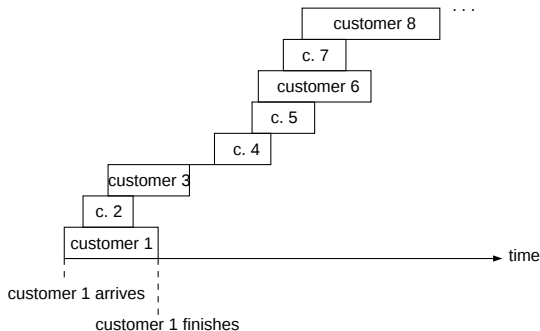
$$L = \lambda_e W,$$

ahol

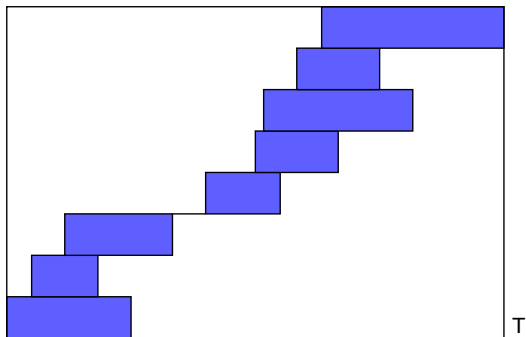
- ▶ W az átlagos várakozási idő értéke.
- ▶ λ_e az effektív érkezési ráta (véges buffer esetén a teli buffer miatt elveszett érkezések nem számítanak bele),
- ▶ L az átlagos sorhossz.

Little-formula

Biz. (vázlat) Ábrázoljuk az igényeket a következő módon (az érkezés ideje szerint rendezve):

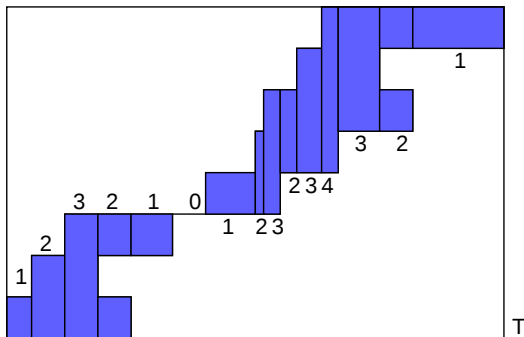


Little-formula



Nagy T esetén a téglalapok száma T -ig $\lambda_e T + o(T)$ a NSzT alapján, egy téglalap területe pedig átlagosan W , tehát a kék terület összesen $B = \lambda_e TW + o(T)$.

Little-formula



Másrészt a kék területet T -vel osztva éppen az átlagos sorhosszt kapjuk meg:

$$L = \frac{B}{T} = \frac{\lambda_e T W}{T} = \lambda_e W.$$

Little-formula

Megjegyzések. Véges állapottér esetén a teli buffer miatt elveszett érkezések nem számítanak bele λ_e -be.

λ_e kiszámítható a $v_{st} = (x_0 \ x_1 \ \dots)$ stacionárius eloszlásból:

$$\lambda_e = \lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_K x_K,$$

speciálisan ha az érkezési ráta konstans λ , akkor ez a következő alakban is írható:

$$\lambda_e = \lambda(1 - x_K).$$

Végtelen, stabil sorra pedig, ha az érkezési ráta konstans λ , akkor

$$\lambda_e = \lambda.$$

Az átlagos sorhossz L is megkapható a stacionárius eloszlásból az ergodtétel révén:

$$L = 0 \cdot x_0 + 1 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + \dots$$

Little-formula

Mi most Markov-sorokra használjuk, de a Little-formula gyakorlatilag tetszőleges sorbanállási rendszerre teljesül, például a következő esetekben:

- ▶ ha például az érkezési időköz vagy a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású (ilyenkor a sor nem is Markov-lánc);
- ▶ ha a rendszer nem beérkezési sorrendben szolgálja ki az igényeket;
- ▶ ha több sorból áll a rendszer (sőt, ilyenkor igaz külön-külön az egyes sorokra és globálisan az egész rendszerre is).

Viszont a Little-formula csak az összes beérkező igényre kiátlagolt várakozási időt számítja ki. Következőnek megnézzük, hogy mi a helyzet, ha ennél részletesebb információra van szükség.

Konvolúció

Valószínűségszámítás előkészületekkel kezdünk.

Legyenek X és Y nemnegatív folytonos eloszlású valószínűségi változók, sűrűségfüggvényeik $f_X, f_Y : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, eloszlásfüggvényeik $F_X, F_Y : [0, \infty) \rightarrow [0, 1]$.

Tétel.

Legyen $Z = X + Y$. Ha X és Y függetlenek, akkor Z sűrűségfüggvénye

$$f_Z(x) = \int_0^x f_Y(y)f_X(x-y)dy,$$

eloszlásfüggvénye

$$F_Z(x) = \int_0^x F_Y(y)f_X(x-y)dy = \int_0^x f_Y(y)F_X(x-y)dy.$$

Z eloszlását úgy hívjuk, hogy X és Y eloszlásának a konvolúciója.

Exponenciális eloszlás

Az $X \sim \text{EXP}(\lambda)$ (λ paraméterű exponenciális) eloszlás sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0),$$

eloszlásfüggvénye

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (x \geq 0).$$

A várható értéke $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Erlang eloszlás

Ha $X_1, \dots, X_n \sim \text{EXP}(\lambda)$ függetlenek, akkor

$$Y = X_1 + \dots + X_n$$

eloszlását Erlang eloszlásnak nevezzük n és λ paraméterekkel (röviden $Y \sim \text{Erlang}(n, \lambda)$); a sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \quad (x \geq 0),$$

eloszlásfüggvénye

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \quad (x \geq 0),$$

várható értéke $\mathbb{E}(Y) = \frac{n}{\lambda}$.

Speciálisan $\text{Erlang}(1, \lambda) = \text{EXP}(\lambda)$.

Geometriai eloszlás és pesszimista geometriai eloszlás

Az, hogy hányadik független érmedobásra jön ki először fej egy olyan érmével, aminél p a fej valószínűsége, geometriai eloszlású: $N \sim \text{GEO}(p)$ ($0 < p < 1$):

$$P(N = n) = p(1 - p)^{n-1} \quad n = 1, 2, \dots$$

A pesszimista geometriai eloszlás ugyanez, csak a fej dobást nem számoljuk. $M \sim \text{PGEO}(p)$:

$$P(M = n) = p(1 - p)^n \quad n = 0, 1, \dots$$

A pesszimista geometriai eloszlás “eggyel kevesebb”, mint a geometriai eloszlás:

$$N \sim \text{GEO}(p) \quad \Longleftrightarrow \quad N - 1 \sim \text{PGEO}(p)$$

Geometriai eloszlás és pesszimista geometriai eloszlás

A geometriai és pesszimista geometriai eloszlások memóriamentesek.

Lemma

(a) *Ha $N \sim \text{GEO}(p)$, akkor*

$$P(N > m + n | N > m) = P(N > n) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

(b) *Ha N eloszlására teljesül az előbbi tulajdonság, akkor $N \sim \text{GEO}(p)$ valamilyen p -re.*

(c) *Ha $M \sim \text{PGEO}(p)$, akkor*

$$P(M \geq m + n | M \geq m) = P(M \geq n) \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}^+.$$

(d) *Ha M eloszlására teljesül az előbbi tulajdonság, akkor $M \sim \text{PGEO}(p)$ valamilyen p -re.*

Csonkolt geometriai eloszlás

A csonkolt (truncated) geometriai eloszlás a geometriai eloszlás azon feltétel mellett, hogy az értéke legfeljebb K .

$N \sim \text{TGEO}(K, p)$:

$$P(N = n) = \frac{p(1-p)^{n-1}}{1 - (1-p)^K} \quad n = 1, 2, \dots, K.$$

A csonkolt pesszimista geometriai eloszlás a pesszimista geometriai eloszlás azon feltétel mellett, hogy az értéke legfeljebb K .

$N \sim \text{TPGEO}(K, p)$:

$$P(N = n) = \frac{p(1-p)^n}{1 - (1-p)^{K+1}} \quad n = 0, 1, \dots, K.$$

Kapcsolat a geometriai és exponenciális eloszlás között

Lemma

Ha $X_1, \dots, X_n \sim \text{EXP}(\lambda)$ függetlenek, és $N \sim \text{GEO}(p)$ tőlük független, akkor

$$Y = X_1 + \dots + X_N$$

eloszlása

$$Y \sim \text{EXP}(p\lambda).$$

Biz. Azon feltétel mellett, hogy $N = n$, Y feltételes eloszlása $\text{Erlang}(k, \lambda)$. Teljes valószínűség tételét használjuk Y sűrűségfüggvényére:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} = p\lambda e^{-\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p)x)^{n-1}}{(n-1)!} = \\ &= p\lambda e^{-\lambda x} e^{\lambda(1-p)x} = p\lambda e^{-p\lambda x}, \end{aligned}$$

ami éppen $\text{EXP}(p\lambda)$ sűrűségfüggvénye.

M/M/1 sor kiszolgálási idő eloszlása

Tekintsünk egy stacionárius M/M/1 sort. Az érkezési ráta λ , a kiszolgálási ráta μ , $\lambda < \mu$. A sor terhelése

$$\rho = \lambda/\mu < 1.$$

Tétel.

- (a) Az M/M/1 sor stacionárius sorhossz eloszlása $PGEO(1 - \rho)$.
- (b) Feltéve, hogy egy igény a sorban a k -adik helyre érkezik (vagyis beérkezéskor $k - 1$ igény van előtte), a kiszolgálási idő eloszlása $Erlang(k, \lambda)$.
- (c) Egy véletlen igény várakozási ideje $EXP((1 - \rho)\mu)$.

M/M/1 sor kiszolgálási idő eloszlása

Biz.

(a) A dinamikus egyensúly egyenletekből

$$\mu x_{i+1} = \lambda x_i \implies x_{i+1} = \frac{\lambda}{\mu} x_i = \rho x_i,$$

és

$$x_n = \rho^n \cdot (1 - \rho),$$

ami éppen a PGEO($1 - \rho$) eloszlás.

(b) Az aktuális igény távozásához ki kell szolgálni az előtte lévő $k - 1$ igényt és az aktuális igényt is; mindegyiknek a kiszolgálási ideje $\text{EXP}(\lambda)$ eloszlású, és k darab $\text{EXP}(\lambda)$ eloszlás konvolúciója éppen az $\text{Erlang}(k, \lambda)$ eloszlás.

M/M/1 sor kiszolgálási idő eloszlása

- (c) Itt annyi különbség van a (b) részhez képest, hogy a beérkező igény egy véletlen hosszú sorba érkezik.

Kérdés: milyen sorhossz-eloszlást lát a beérkező igény?

A sorhossz stacionárius eloszlását látja a beérkező igény is.

A sorhossz stacionárius eloszlása $\text{PGEO}(1 - \rho)$, a beérkező igénynel együtt az igények száma eggyel nagyobb, azaz $\text{GEO}(1 - \rho)$ eloszlású, és ennyi darab $\text{EXP}(\mu)$ eloszlás konvolúciója az előző lemma szerint éppen $\text{EXP}((1 - \rho)\mu)$ eloszlású.

M/M/1/K sor kiszolgálási idő eloszlása

Tétel.

- (a) Az $M/M/1/K$ sor stacionárius sorhossz eloszlása $TPGEO(K, 1 - \rho)$.
- (b) Feltéve, hogy egy igény a sorban a k -adik helyre érkezik (vagyis beérkezéskor $k - 1$ igény van előtte), a kiszolgálási idő eloszlása $Erlang(k, \lambda)$.
- (c) Egy, a rendszerbe bekerülő véletlen igény várakozási ideje $Erlang(k, \lambda)$ eloszlások keveréke $PGEO(K, 1 - \rho)$ eloszlás szerinti súlyokkal.

Nem biz., de ugyanaz, mint az $M/M/1$, csak a véges buffer miatt mindenhol a geometriai eloszlás csunkolt változata szerepel.

Fontos: véges buffer esetén az igények egy része elvész.

M/M/c és M/M/c/K sorok kiszolgálási idő eloszlása

Az M/M/c és M/M/c/K sorokra (ahol 1 helyett c szerver szolgálja ki az igényeket) hasonlóan számolható a kiszolgálási idő, mint eddig, és Erlang eloszlások megfelelő keveréke lesz. Az M/M/c és M/M/c/K sorok stacionárius eloszlása sajnos nem pontosan geometriai eloszlás, és a képletek valamivel rondábbak, de ugyanúgy expliciten számolható minden. Ezt most nem tesszük meg.

Egy fontos közös tulajdonság ezekben a sorokban, hogy ha egy igény bekerült a rendszerbe, akkor a kiszolgálási idejét már nem befolyásolja az, ami mögötte történik a sorban. Ez más Markov-sorokra nem teljesül, és nem Erlang eloszlások keveréke lesz a kiszolgálási idő.

M/M/c és M/M/c/K sorok kiszolgálási idő eloszlása

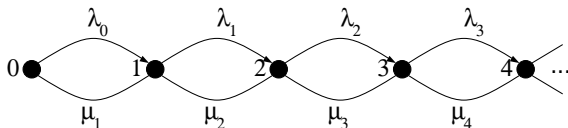
Ami szintén közös az M/M/1, M/M/1/K, M/M/c, M/M/c/K sorokban, hogy egy véletlenszerű beérkező igény a stacionárius sorhossz-eloszlást látja.

Ez más Markov-sorokra is teljesül, egészen pontosan abban az esetben, ha az érkezési ráta konstans λ minden állapotra. Ez PASTA-elv (Poisson Arrival Sees Time Average) vagy Érkezési tétel (Arrival theorem) néven is ismert.

A “Poisson Arrival Sees Time Average” megfogalmazás mögött az van, hogy még olyan (nem-markovi) sorokban is teljesül, ahol a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású. Ilyenkor a rendszer nem folytonos idejű Markov-lánc, és nincs stacionárius eloszlás, hanem helyette hosszú távú időátlag (time average) szerepel - de az teljesül, hogy a véletlenszerű beérkező igény pont ezt az eloszlást látja.

Nem biz., de lényegében azon múlik, hogy a beérkező igények “függetlenek” a sor hosszától.

Általános Markov-sorok



Egy általános Markov-sorban minden állapotban eltérő lehet az érkezési és a kiszolgálási ráta.

Eltérő kiszolgálási ráta lehet például amiatt, hogy a szerver (részben) párhuzamosítani tudja az igényeket: több igény esetén a teljes kiszolgálási ráta valamivel nagyobb. Ilyenkor általában a kiszolgálás sem FIFO, hanem valamilyen megosztás történik több igény között. Ezt meg fogjuk vizsgálni.

Eltérő érkezési ráta lehet például amiatt, hogy a vizsgált sor egy nagyobb rendszer része, ahol egy diszpécser terheléelosztást végez - ha hosszabb a sor, az érkezéseket máshová irányítja. Ezt is meg fogjuk nézni (de nem ma).

Laplace-transzformált

Előkészület: Laplace-transzformáció.

Egy $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltja

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Egy $X \geq 0$ folytonos valószínűségi változó Laplace-transzformáltja

$$X^*(s) = E\left(e^{-sX}\right) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

ahol $f(t)$ az X sűrűségfüggvénye.

Ha f sűrűségfüggvény, akkor az integrál konvergens minden $\operatorname{Re}(z) \geq 0$ komplex számra.

Tulajdonságok

Példa. Az $X \sim \text{EXP}(\lambda)$ eloszlás Laplace-transzformáltja

$$X^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + s}.$$

Lemma (Teljes várható érték tétel Laplace-transzformáltra)

Ha X, Y, Z valószínűségi változók f_X, f_Y, f_Z sűrűségfüggvénnyel, és

$$\mathbb{P}(Z = X) = p, \quad \mathbb{P}(Z = Y) = 1 - p,$$

akkor

$$f_Z^*(s) = pf_X^*(s) + (1 - p)f_Y^*(s).$$

Biz. (vázlat) A Laplace-transzformált lineáris: ha a, b valós konstansok, akkor

$$(af + bg)^*(s) = a \cdot f^*(s) + b \cdot g^*(s).$$

Tulajdonságok

További fontos tulajdonsága, hogy konvolúcióból szorzatot csinál.

Lemma

Ha X, Y valószínűségi változók függetlenek f_X, f_Y sűrűségfüggvénnyel, és

$$Z = X + Y,$$

akkor

$$f_Z^*(s) = f_X^*(s) \cdot f_Y^*(s).$$

Tulajdonságok

Biz. Ha $Z = X + Y$, akkor $f_Z = f_X \otimes f_Y$, és

$$\begin{aligned} f_Z^*(s) &= \int_0^\infty f_Z(t) e^{-st} dt = \int_0^\infty \left(\int_0^t f_Y(u) f_X(t-u) du \right) e^{-st} dt = \\ &= \int_0^\infty \int_u^\infty f_Y(u) f_X(t-u) e^{-st} dt du. \end{aligned}$$

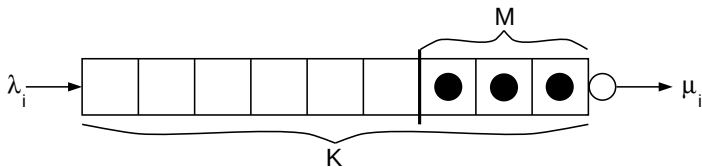
$v = t - u$ változócserevel

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \int_u^\infty f_Y(u) f_X(t-u) e^{-st} dt du = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_Y(u) f_X(v) e^{-s(v+u)} dv du = \\ &= \int_0^\infty f_Y(u) e^{-su} du \cdot \int_0^\infty f_X(v) e^{-sv} dv = \\ &= f_Y^*(s) \cdot f_X^*(s). \end{aligned}$$

Általános Markov-sor

Tekintsünk egy általános véges bufferű Markov-sort. A buffer mérete K . Az i állapotban az érkezési ráta λ_i , a kiszolgálási ráta μ_i .

A kiszolgálási elv FIFO helyett Limited Processor Sharing (LPS): megengedjük, hogy egyszerre több igényt szolgáljon ki a szerver párhuzamosan, maximum M -et.



Ilyenkor, ha legfeljebb M igény van a sorban, akkor a teljes μ_i kiszolgálási ráta egyenletesen oszlik meg a sorban lévő igények között. Ha M -nél több igény van a sorban, akkor az első M igény között oszlik meg a kiszolgálási ráta, a későbbi igények várakoznak.

Speciálisan az $M = 1$ esetben visszkapjuk a FIFO kiszolgálást.

Kiszolgálási idő eloszlás általános Markov-sorra

Tekintsünk egy kitüntetett igényt egy j hosszú sorban az i -edik pozícióban ($1 \leq i \leq j \leq K$). Jelölje $X_{i,j}$ a kiszolgálási idejét.

$X_{i,j}$ sűrűségfüggvénye $f_{i,j}(t)$, Laplace-transzformáltja $f_{i,j}^*(s)$.

A következő változások történhetnek a sorral:

- ▶ Érkezik egy igény a sor végére. Ennek rátája λ_j . Ekkor a kitüntetett igény továbbra is az i -edik pozícióban van, de a sor hossza $(j + 1)$ -re változik.
- ▶ Történik egy kiszolgálás a sorban. Ennek rátája μ_j . Ha az a kitüntetett igény, akkor a kiszolgálása befejeződött. Ha egy másik igényt szolgált ki a szerver, akkor a kitüntetett igény $i > M$ esetén előrébb lép az $(i - 1)$ -edik pozícióba. $i \leq M$ esetén tulajdonképpen mindegy, előre lép-e, mivel az első M igény egyforma helyzetben van.

Kiszolgálási idő eloszlás általános Markov-sorra

A kétféle változás együttes rátája $\lambda_j + \mu_j$, így a következő állapotváltozásig eltelt idő $\text{EXP}(\lambda_j + \mu_j)$ eloszlású (ennek Laplace-transzformáltja $\frac{\lambda_j + \mu_j}{\lambda_j + \mu_j + s}$), és a változáskor $\frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j}$ az érkezés valószínűsége és $\frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j}$ a kiszolgálás valószínűsége.

Legyen először $M < i \leq j < K$. A fentiek alapján a Laplace-transzformáltra teljesül a következő egyenlet:

$$f_{i,j}^*(s) = \frac{\lambda_j + \mu_j}{\lambda_j + \mu_j + s} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j} f_{i,j+1}^*(s) + \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} f_{i-1,j-1}^*(s) \right)$$

A cél: felírni hasonló egyenleteket az összes $f_{i,j}^*(s)$ -re, majd a kapott egyenletrendszert megoldani.

Kiszolgálási idő eloszlás általános Markov-sorra

További esetek.

Ha $i \leq j \leq M$ és $j < K$, akkor egyrészt

$$f_{1,j}^*(s) = \dots f_{j,j}^*(s),$$

hiszen az első j igény helyzete egyforma, másrészt

$$f_{i,j}^*(s) = \frac{\lambda_j + \mu_j}{\lambda_j + \mu_j + s} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j} f_{i,j+1}^*(s) + \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \frac{j-1}{j} f_{i-1,j-1}^*(s) + \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \frac{1}{j} \cdot 1 \right),$$

mivel az első j igényből $1/j$ eséllyel a kitüntetett igényt szolgálja ki a szerver, és olyankor az elhagyja a rendszert (0 további időt tölt a rendszerben, aminek a Laplace-transzformáltja 1).

Kiszolgálási idő eloszlás általános Markov-sorra

Ha $i \leq M < j < K$, akkor is

$$f_{1,j}^*(s) = \dots f_{M,j}^*(s),$$

hiszen az első M igény helyzete egyforma, másrészt

$$f_{i,j}^*(s) = \frac{\lambda_j + \mu_j}{\lambda_j + \mu_j + s} \left(\frac{\lambda_j}{\lambda_j + \mu_j} f_{i,j+1}^*(s) + \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \frac{M-1}{M} f_{i-1,j-1}^*(s) + \frac{\mu_j}{\lambda_j + \mu_j} \frac{1}{M} \cdot 1 \right),$$

mivel ilyenkor az első M igény között oszlik meg a kiszolgálási ráta, és azon belül $1/M$ eséllyel a kitüntetett igényt szolgálja ki a szerver.

Kiszolgálási idő eloszlás általános Markov-sorra

$j = K$, azaz tele buffer esetén nem történhet érkezés, csak kiszolgálás. Ha $i \leq M$, akkor is teljesül

$$f_{1,K}^*(s) = \dots f_{M,K}^*(s),$$

továbbá

$$f_{i,K}^*(s) = \frac{\mu_j}{\mu_j + s} \left(\frac{M-1}{M} f_{i-1,M-1}^*(s) + \frac{1}{M} \cdot 1 \right),$$

Hasonlóan tele buffer, csak $i > M$ esetén a kitüntetett igény biztosan nem kap kiszolgálást, így

$$f_{i,K}^*(s) = \frac{\mu_j}{\mu_j + s} f_{i-1,M-1}^*(s).$$

Inverz Laplace-transzformáció

Minden (i, j) párra $(1 \leq j \leq j \leq K)$ felírva az előző egyenleteket, kapunk egy egyenletrendszert, ami lineáris az $f_{i,j}^*(s)$ változóiban $\rightarrow$ meg tudjuk oldani, ezzel a $f_{i,j}^*(s)$ függvények megvannak.

Ezután a dinamikus egyenletekből kiszámoljuk a sorhossz stacionárius eloszlását: $v_{st} = (x_0, x_1, \dots, x_K)$. Figyelem! Ha λ_i nem konstans, akkor egy véletlen beérkező igény nem a sorhossz stacionárius eloszlását látja! Ehelyett v_{st} -t újra kell súlyozni a λ_i érkezési rátákkal:

$$y_i = \frac{\lambda_i x_i}{\sum_{i=0}^{K-1} \lambda_i x_i} \quad i = 0, \dots, K-1.$$

Amikor egy igény megérkezik egy i hosszú sorba, akkor ő az utolsó lesz és a sor hossza $i+1$ lesz, így egy véletlen igény kiszolgálási idejének Laplace-transzformáltja

$$f^*(s) = \sum_{i=0}^{K-1} y_i f_{i+1,i+1}^*(s).$$

Inverz Laplace-transzformáció

Ha $f^*(s)$ ismert, akkor egyszerűbb esetekben $f(t)$ visszakapható analitikusan. A gyakorlatban azért többnyire numerikus inverz Laplace transzformációt végzünk. Általában $f^*(s)$ bizonyos (esetleg komplex) pontbeli értékeinek lineáris kombinációval közelítjük $f(t)$ -t:

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{t} f^*\left(\frac{\beta_k}{t}\right),$$

ahol a β_k alappontokra és η_k súlyokra többféle választás is lehetséges.

Bővebben ajánlom a

<http://inverselaplace.org/>

honlapot, ahol többek között python implementáció is található.