

### 3. gyakorlat: Terheléelosztás, kiszolgálási idő eloszlása

Kommunikációs hálózatok teljesítményének elemzése

Horváth Illés

2024/10/10

# 1. feladat

Tekintsünk egy terhelés-elosztási rendszert, amelyben 1 diszpécser és  $N$  szerver van ( $N$  nagy). A diszpécserhez érkező ráta  $\lambda N$ , ahol  $\lambda = 1.25$ , a terhelés-elosztási elv JSQ. Az egyes szerverek buffermérete 5, a kiszolgálási ráta a bufferben lévő igények (1, 2, 3, 4, 5) számától függően rendre 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4. A szerverek Processor Sharing (PS) kiszolgálást alkalmaznak, a kiszolgálási rátát egyenletesen osztják szét a bufferben lévő összes igény között. Kezdetben minden sor üres.

# 1. feladat

- (a) Írjuk fel az  $N \rightarrow \infty$  limeszhez tartozó mean-field rendszerre vonatkozó differenciálegyenlet-rendszert.
- (b) Oldjuk meg a diffegyenlet-rendszert numerikusan Euler-módszerrel. Figyeljünk a szakadásokra!
- (c) Ábrázoljuk a megoldást a  $[0, 50]$  időtartamon.
- (d) Hogyan kaphatnánk meg a fentiekből numerikusan a mean-field stacionárius eloszlást?
- (e) Számítsuk ki Little-formula segítségével az átlagos kiszolgálási időt.
- (f) Mi a helyzet más terhelés esetén? Számítsuk ki a stacionárius eloszlást a következő terhelések esetén:  
 $\lambda = 0.5, \lambda = 1.08, \lambda = 1.35$ . (A többi paraméter értéke változatlan.)

# 1. feladat

- (a) Írjuk fel az  $N \rightarrow \infty$  limeszhez tartozó mean-field rendszerre vonatkozó differenciálegyenlet-rendszert.

Megoldás.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_k(t) = & \lambda f_{k-1}(v(t)) v_{k-1}(t) - \lambda f_k(v(t)) v_k(t) + \\ & + \mu_{k+1} v_{k+1}(t) - \mu_k v_k(t) \quad (k = 0, \dots, K), \end{aligned}$$

ahol

$$f_k(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } \sum_{i=0}^{k-1} x_i > 0; \\ 1 & \text{ha } \sum_{i=0}^{k-1} x_i = 0 \text{ és } x_k > 0; \end{cases}$$

$f_k(x)$  a JSQ-hoz tartozó diszpécser függvény, és azt írja le, hogy a teljes terhelés a legrövidebb sorba irányul.

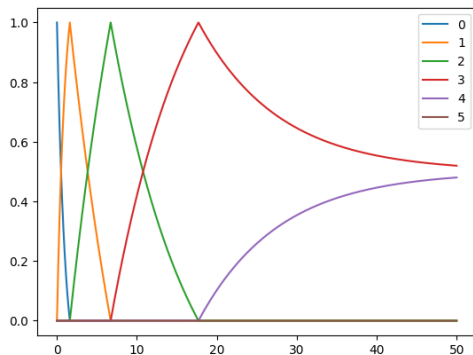
# 1. feladat

- (a)  $f_k(x)$  nem folytonos, hanem "lépcsős" függvény; amikor a rendszerben az addigi legrövidebb sorok elfogynak (mind feltöltődnek eggyel hosszabb sorra), akkor onnantól a diszpécser az eggyel hosszabb sorokban vesz fel 1-et.

A diszpécser függvény szakadásai a megoldásban töréspontként jelennek meg. (Ez nem gond, csak pl. a numerikus differenciál-megoldás során kezelni kell.)

# 1. feladat

(c) Ábrázoljuk a megoldást a  $[0, 50]$  időtartamon. Megoldás.



A rendszer fejlődésében nem játszik szerepet, hogy az egyes szerverekben FIFO vagy PS kiszolgálás van, mivel csak azt tartjuk nyilván, hogy milyen hosszú a sor; az, hogy melyik igényt szolgálta ki a szerver, lényegtelen.

# 1. feladat

- (d) Hogyan kaphatnánk meg a fentiekből numerikusan a mean-field stacionárius eloszlást?

Megoldás.  $t \rightarrow \infty$  esetén  $v(t) \rightarrow v_{\text{st}}$ . Az előző ábrán még  $t = 50$  nem elég nagy, vegyük nagyobbra, pl.

$$v(200) = [0.0, 0.0, 0.0, 0.5000000006, 0.4999999994, 0.0],$$

ez már jó közelítés  $v_{\text{st}}$ -re.

(A stacionárius eloszlás sem függ attól, hogy FIFO vagy PS a kiszolgálás.)

## 1. feladat

- (e) Számítsuk ki Little-formula segítségével az átlagos kiszolgálási időt.

Megoldás. Az átlagos sorhossz

$$L = \sum_{i=0}^5 ix_i = 0.5 \cdot 3 + 0.5 \cdot 4 = 3.5,$$

az effektív érkezési ráta pedig

$$\lambda_e = \lambda = 1.25$$

(a terheléselosztás miatt nincs adatvesztés).

Innen a Little-formula alapján

$$W = L/\lambda_e = 2.8.$$

## 2. feladat

Az előző feladatbeli terheléselosztó rendszert vizsgáljuk, a paraméterek ugyanazok.

- (a) Határozzuk meg analitikusan a stacionárius eloszlást.
- (b) Legyen  $f_i(t)$  egy olyan igény kiszolgálási idejének a sűrűségfüggvénye, amelyik egy  $i$  hosszú sorban áll éppen. Számítsuk ki a Laplace-transzformáltját.
- (c) Számítsuk ki és ábrázoljuk egy véletlen igény kiszolgálási idejének eloszlásfüggvényét.

## 2. feladat

(a) Határozzuk meg analitikusan a stacionárius eloszlást.

Megoldás. JSQ esetén a stacionárius eloszlás két szomszédos  $i_0$  és  $i_0 + 1$  állapotra koncentrált. Mivel

$$\mu_3 = 1.2 < \lambda = 1.25 < \mu_4 = 1.3,$$

ezért  $i_0 = 3$ .

$x_3$  és  $x_4$  meghatározható a

$$\mu_3 x_3 + \mu_4 x_4 = \lambda$$

$$x_3 + x_4 = 1$$

egyenletrendszerből;  $x_3 = x_4 = 0.5$ , és

$$v_{\text{st}} = [0 \ 0 \ 0 \ 0.5 \ 0.5 \ 0]$$

## 2. feladat

- (b) Legyen  $f_i(t)$  egy olyan igény kiszolgálási idejének a sűrűségfüggvénye, amelyik egy  $i$  hosszú sorban áll éppen. Számítsuk ki a Laplace-transzformáltját.

Megoldás. Jelölje  $X_i$  egy olyan igény kiszolgálási idejét, amelyik  $i$  hosszú sorban van (PS miatt mindegy, hogy az igény azon belül hányadik helyen van a sorban).  $X_i$  Laplace-transzformáltja  $f_i^*(s)$ .

$$f_{i_0-1}^*(s) = f_{i_0}^*(s)$$

$$f_{i_0}^*(s) = \frac{\lambda_d/x_{i_0} + \mu_{i_0}}{\lambda_d/x_{i_0} + \mu_{i_0} + s} \times \left( \frac{\lambda_d/x_{i_0}}{\lambda_d/x_{i_0} + \mu_{i_0}} f_{i_0+1}^*(s) + \right. \\ \left. \frac{\mu_{i_0}}{\lambda_d/x_{i_0} + \mu_{i_0}} \frac{i_0 - 1}{i_0} f_{i_0-1}^*(s) + \frac{\mu_{i_0}}{\lambda_d/x_{i_0} + \mu_{i_0}} \frac{1}{i_0} \cdot 1 \right)$$

$$f_{i_0+1}^*(s) = \frac{\mu_{i_0+1}}{\mu_{i_0+1} + s} \left( \frac{i_0}{i_0 + 1} f_{i_0}^*(s) + \frac{1}{i_0 + 1} \cdot 1 \right)$$

## 2. feladat

- (b) Behelyettesítjük a paramétereket és ismert értékeket ( $\lambda_d = 0.6$ ):

$$f_2^*(s) = f_3^*(s)$$

$$f_3^*(s) = \frac{1}{1.2 + 1.2 + s} \left( 1.2 f_4^*(s) + 1.2 \cdot \frac{2}{3} f_2^*(s) + 1.2 \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 \right)$$

$$f_4^*(s) = \frac{1.3}{1.3 + s} \left( \frac{3}{4} f_3^*(s) + \frac{1}{4} \cdot 1 \right)$$

ennek a megoldása

$$f_2^*(s) = f_3^*(s) = \frac{40s + 117}{100s^2 + 370s + 117},$$

$$f_4^*(s) = \frac{32.5s + 117}{100s^2 + 370s + 117},$$

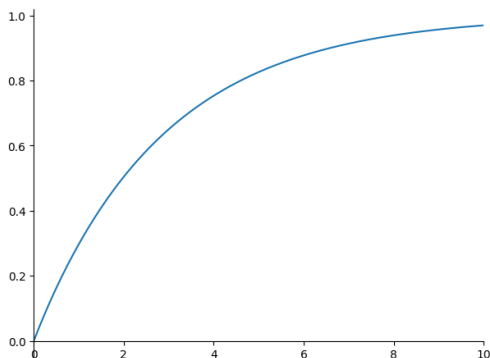
és

$$f(s) = 0.6 f_3^*(s) + 0.65 f_4^*(s).$$

## 2. feladat

- (c) Számítsuk ki és ábrázoljuk egy véletlen igény kiszolgálási idejének eloszlásfüggvényét. Megoldás.  $F(t)$  kiszámításához  $f(s)/s$ -et kell inverz Laplace transzformálni; az eredmény

$$F(t) = 1 - 0.00394218e^{-3.35083t} - 0.996058e^{-0.349167t}.$$



### 3. feladat

Tekintsünk egy terhelés-elosztási rendszert, ahol egy diszpécser és  $N$  szerver van, és a diszpécser Join-Below-Threshold (JBT) terheléselosztási elvet követ: ilyenkor minden szerverhez meg van adva egy  $B$  küszöb, és a diszpécser azon szerverek közül választ találomra, amelyeknél a sorhossz a küszöb alatt van (illetve ha minden szerver sorhossza eléri a küszöböt, akkor az összes szerver közül választ találomra).

Az egyes szerverek buffermérete 5, a kiszolgálási ráta a bufferben lévő igények (1, 2, 3, 4, 5) számától függően rendre 1.0, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4. A szerverek Processor Sharing (PS) kiszolgálást alkalmaznak, a kiszolgálási rátát egyenletesen osztják szét a bufferben lévő összes igény között. Kezdetben minden sor üres.

A diszpécserhez történő érkezések rátája  $\lambda N$ , ahol  $\lambda = 1.25$ , és a szerverek telítettségi küszöbe  $B = 4$ .

### 3. feladat

- (a) Írjuk fel az  $N \rightarrow \infty$  limeszhez tartozó mean-field rendszerre vonatkozó differenciálegyenlet-rendszert.
- (b) Oldjuk meg a diffegyenlet-rendszert numerikusan Euler-módszerrel.
- (c) Ábrázoljuk a megoldást a  $[0, 50]$  időtartamon.
- (d) Számítsuk ki numerikusan a mean-field stacionárius eloszlást.
- (e) Little-formula segítségével számítsuk ki egy véletlen igény átlagos kiszolgálási idejét ( $W$ ).
- (f) Vizsgáljuk meg, hogyan változik  $W$  a terheléstől és a küszöb értékétől függően.

### 3. feladat

- (a) Írjuk fel az  $N \rightarrow \infty$  limeszhez tartozó mean-field rendszerre vonatkozó differenciálegyenlet-rendszert.

Megoldás.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v_k(t) = & \lambda f_{k-1}(v(t)) v_{k-1}(t) - \lambda f_k(v(t)) v_k(t) + \\ & + \mu_{k+1} v_{k+1}(t) - \mu_k v_k(t) \quad (k = 0, \dots, K), \end{aligned}$$

ahol

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{x_k}{\sum_{i=0}^{B-1} x_i} & \text{ha } \sum_{i=0}^{B-1} x_i > 0; \\ 0 & \text{ha } k \geq B \text{ és } \sum_{i=0}^{B-1} x_i > 0; \\ x_k & \text{ha } \sum_{i=0}^{B-1} x_i = 0. \end{cases}$$

### 3. feladat

(a) A diszpécser függvényhez némi magyarázat.

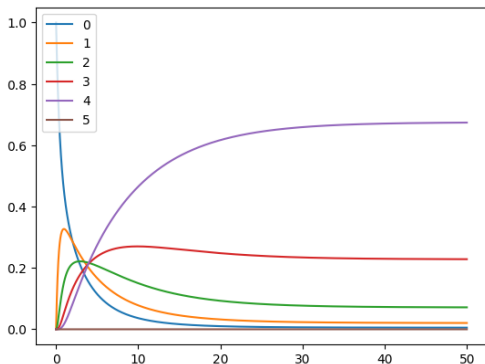
$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{x_k}{\sum_{i=0}^{B-1} x_i} & \text{ha } \sum_{i=0}^{B-1} x_i > 0; \\ 0 & \text{ha } k \geq B \text{ és } \sum_{i=0}^{B-1} x_i > 0; \\ x_k & \text{ha } \sum_{i=0}^{B-1} x_i = 0. \end{cases}$$

$\sum_{i=0}^{B-1} x_i$  a szabad (küszöb alatti) szerverek aránya. Ha van szabad szerver, akkor azok között egyenletesen oszlik meg a terhelés, és a küszöb feletti sorokba nem irányul terhelés (első két ág).

Ha nincs szabad szerver, akkor az összes sor között egyenletesen oszlik meg a terhelés (harmadik ág).

### 3. feladat

(c) Ábrázoljuk a megoldást a  $[0, 50]$  időtartamon. Megoldás.



(d) Számítsuk ki numerikusan a mean-field stacionárius eloszlást.  
Megoldás.

$$v_{\text{st}} \approx v(200) = [0.0053, 0.0203, 0.0711, 0.2281, 0.6752, 0]$$

### 3. feladat

- (e) Little-formula segítségével számítsuk ki egy véletlen igény átlagos kiszolgálási idejét ( $W$ ).

Megoldás. Az átlagos sorhossz

$$L = \sum_{i=0}^5 i x_i,$$

az effektív érkezési ráta pedig

$$\lambda_e = \lambda$$

(a terheléselosztás miatt nincs adatvesztés).

Innen a Little-formula alapján

$$W = L/\lambda_e.$$

## 4. feladat

Az előző feladathoz hasonlóan JBT rendszert vizsgálunk.

- (a) Az egyes szerverek buffermérete  $K = 3$ , a küszöb  $B = 3$ , a kiszolgálási ráta a bufferben lévő igények  $(1, 2, 3)$  számától függően rendre  $3.0, 0.8, 1.003$ , a rendszer terhelése  $\lambda = 1.0$ . Indítsuk el a mean-field rendszert a  $[0, 0, 0.1, 0.9]$  kezdeti feltételből. Ábrázoljuk a rendszer fejlődését.
- (b) Mit tapasztalunk, ha ugyanezt a rendszert a  $[0.15, 0.10, 0.25, 0.50]$  kezdeti feltételből indítjuk el?

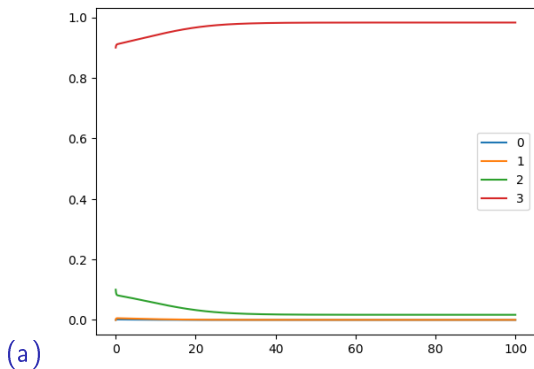
## 4. feladat

(a) Általában ki szoktuk kötni, hogy

$$\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots,$$

de ez itt nem teljesül. Ilyen helyzetben általában a  $B$  küszöböt a legnagyobb olyan értékre állítják, ameddig még  $\mu_k$  monoton nő, de itt nem ilyen a helyzet (szándékosan). Nézzük meg, hogyan fejlődik a rendszer.

## 4. feladat



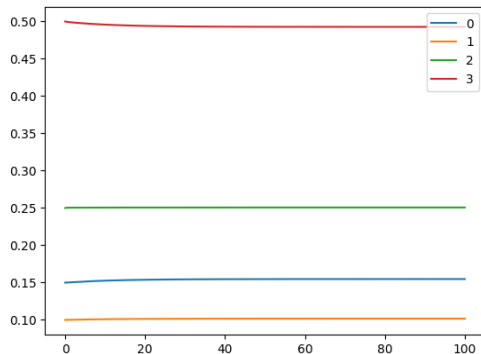
A rendszer konvergál a

$[0.000012, 0.000236, 0.017035, 0.982717]$

stabil fixponthoz.

## 4. feladat

(b) A másik kezdeti feltételből indulva a rendszer fejlődése:



A rendszer konvergál a

$[0.154791, 0.101726, 0.250698, 0.492785]$

stabil fixponthoz.

## 4. feladat

(b) Vagyis a mean-field rendszernek több stabil fixpontja van.

Vajon ez azt jelenti, hogy véges  $N$ -re a Markov populációs modellnek is több különböző stacionárius eloszlása van?

Véges Markov-láncnak mindig csak egyetlen stacionárius eloszlása van. Ebben az esetben véges  $N$ -re olyan, ami a két stabil fixpont köré van koncentrálna. Minél nagyobb  $N$ , annál koncentráltabb.

Véges  $N$ -re a két stabil fixpont olyan, mint két „völgy”: a rendszer sok időt eltölt az egyik völgyben, néha átvándorol a másik völgybe, aztán ott tölt el sok időt, és így tovább.