

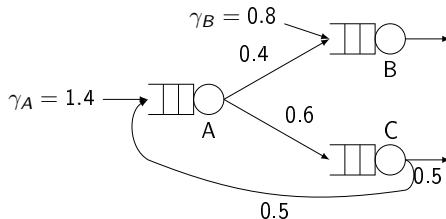
4. gyakorlat: Jackson-hálózatok

Kommunikációs hálózatok teljesítményének elemzése
Mészáros András

2024/10/24

1. feladat

Az alábbi hálózatban mindhárom szerver FIFO, a kiszolgálási rátájuk rendre $\mu_A = 2.5$, $\mu_B = 1.7$, $\mu_C = 1.5$.



- (a) Stabil-e a hálózat?
- (b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?
- (c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?
- (d) Mi a rendszer stacionárius eloszlása?

1. feladat

(a) Stabil-e a hálózat?

Megoldás. A P irányítási mátrix a következő:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Legyen

$$\gamma = (\gamma_A \ \gamma_B \ \gamma_C) = (1.4 \ 0.8 \ 0), \quad \lambda = (\lambda_A \ \lambda_B \ \lambda_C).$$

Az egyes szerverek érkezési rátáját a forgalmi egyenletből tudjuk kiszámítani:

$$\lambda(I - P) = \gamma.$$

1. feladat

(a) A forgalmi egyenlet megoldása

$$\lambda = (2.0 \ 1.6 \ 1.2),$$

így

$$\lambda_A = 2.0 < \mu_A = 2.5,$$

$$\lambda_B = 1.6 < \mu_B = 1.7,$$

$$\lambda_C = 1.2 < \mu_C = 1.5$$

mind teljesül, a rendszer stabil.

1. feladat

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

Megoldás.

$$\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 0.800,$$

$$\rho_B = \lambda_B / \mu_B = 0.941,$$

$$\rho_C = \lambda_C / \mu_C = 0.800.$$

1. feladat

- (c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben? Megoldás.

$$(I - P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.429 & 0.571 & 0.857 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.714 & 0.286 & 1.429 \end{bmatrix},$$

és

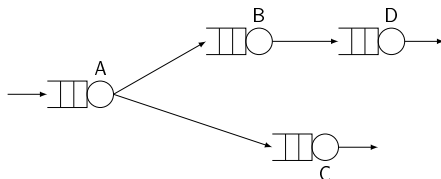
$$\sum_{j=1}^m [(I - P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} = 11.43.$$

- (d) A rendszer stacionárius eloszlása

$$\begin{aligned} v_{\text{st}}(k_A, k_B, k_C) &= (1 - \rho_A) \rho_A^{k_A} (1 - \rho_B) \rho_B^{k_B} (1 - \rho_C) \rho_C^{k_C} = \\ &= 0.00235 \cdot 0.8^{k_A + k_C} \cdot 0.941^{k_B}. \end{aligned}$$

2. feladat

Az alábbi hálózatban minden szerver M/M/1 típusú, az egyes szerverek kiszolgálási rátája rendre $\mu_A = 6.0$, $\mu_B = 2.0$, $\mu_C = 4.0$, $\mu_D = 3.0$. A kívülről történő érkezések rátája $\gamma_A = 2.5$. Az A szerverből kimenő igények p valószínűséggel a B, $1 - p$ valószínűséggel a C szerver sorába állnak be.



- (a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?
- (b) Jellemezzük a D szerver érkezési folyamatát.
- (c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.
- (d) A p paraméter mely értékére lesz az átlagos rendszerben töltött idő minimális?

2. feladat

(a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?

Megoldás. Ez egy aciklikus hálózat, az irányítási mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A forgalmi egyenlet megoldható expliciten:

$$\lambda_A = \gamma_A = 2.5,$$

$$\lambda_B = p\lambda_A = 2.5p,$$

$$\lambda_C = (1-p)\lambda_A = 2.5(1-p),$$

$$\lambda_D = \lambda_C = 2.5(1-p).$$

2. feladat

(a) A hálózat pontosan akkor stabil, ha

$$\lambda_A = 2.5 < \mu_A = 6.0,$$

$$\lambda_B = 2.5p < \mu_B = 2.0,$$

$$\lambda_C = 2.5(1 - p) < \mu_C = 4.0,$$

$$\lambda_D = 2.5p < \mu_D = 3.0$$

mindegyike fennáll, ahonnan

$$0 \leq p < 0.8$$

kell teljesülni.

(b) Jellemezzük a D szerver érkezési folyamatát.

Megoldás. Aciklikus hálózatban ha a külső érkezési folyamatok független Poisson-pontfolyamatok, akkor az egyes szerverek érkezési folyamata is Poisson-folyamat, így a D szerver érkezési folyamata PPP(2.5).

2. feladat

- (c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.

Megoldás.

$$(I - P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & p & 1-p & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

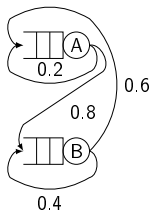
és

$$\sum_{j=1}^4 [(I - P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} =$$
$$0.2857 + \frac{1-p}{4-2.5(1-p)} + \frac{p}{2-2.5p} + \frac{p}{3-2.5p}.$$

- (d) Az előbbi függvény a $p \in [0, 0.8)$ intervallumon a minimumát $p = 0.141$ -nél veszi fel.

3. feladat

Az alábbi zárt hálózatban két igény kering. Az A szerver M/M/1, kiszolgálási rátája $\mu_A = 1.0$, a B szerver szintén M/M/1 típusú, $\mu_B = 2.0$.



- (a) Mik a lehetséges állapotok?
- (b) Írjuk fel a teljes rendszer generátorát, és az alapján számítsuk ki a stacionárius eloszlást.
- (c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást a Gordon-Newell tétel alapján.
- (d) Adjuk meg az egyes szerverek terheltségét.

3. feladat

(a) Mik a lehetséges állapotok?

Megoldás. A lehetséges állapotok:

- ▶ (20): az A szerverben van mindkét igény;
- ▶ (11): az A szerverben és a B szerverben is 1 igény van;
- ▶ (02): a B szerverben van mindkét igény.

(b) A $(20) \rightarrow (11)$ átmenet rátája $1.0 \cdot 0.8$, mivel ilyen átmenet akkor történik, ha az A szerver kiszolgálja a bent lévő két igény valamelyikét (ennek rátája 1.0), ÉS az a B szerverbe kerül át (ennek valószínűsége 0.8). Hasonlóan a többi átmenetráta:

- ▶ $(20) \rightarrow (11)$ rátája $1.0 \cdot 0.8 = 0.8$;
- ▶ $(11) \rightarrow (20)$ rátája $2.0 \cdot 0.6 = 1.2$;
- ▶ $(11) \rightarrow (02)$ rátája $1.0 \cdot 0.8 = 0.8$;
- ▶ $(20) \rightarrow (11)$ rátája $2.0 \cdot 0.6 = 1.2$.

3. feladat

(b) A teljes rendszer mint Markov-lánc generátora

$$Q = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.8 & 0 \\ 1.2 & -2 & 0.8 \\ 0 & 1.2 & -1.2 \end{bmatrix}$$

az ehhez tartozó stacionárius eloszlás pedig

$$v_{\text{st}} = (0.4737 \ 0.3158 \ 0.2105).$$

3. feladat

(c) Az irányítási mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

és a forgalmi egyenlet:

$$\lambda_A = 0.2\lambda_A + 0.6\lambda_B$$

$$\lambda_B = 0.8\lambda_A + 0.4\lambda_B,$$

ahonnan

$$\lambda_A = 3c, \quad \lambda_B = 4c$$

valamely $c > 0$ konstanssal.

3. feladat

(c) A Gordon–Newell tétel szerint c értékét onnan kapjuk, hogy

$$\sum_{\substack{(k_1, \dots, k_m) : \\ k_1 + \dots + k_m = K}} \prod_{j=1}^m \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j} \right)^{k_j} = 1,$$

ami itt

$$\left(\frac{3c}{1.0} \right)^2 + \left(\frac{3c}{1.0} \right) \left(\frac{4c}{2.0} \right) + \left(\frac{4c}{2.0} \right)^2 = 1,$$

ahonnan $c = 0.2294$, és így

$$\lambda_A = 3c = 0.6882, \quad \lambda_B = 4c = 0.9177.$$

3. feladat

(c) A stacionárius eloszlás a Gordon–Newell tételből számolva

$$v_{\text{st}}(2, 0) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A} \right)^2 = 0.4737,$$

$$v_{\text{st}}(1, 1) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A} \right) \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B} \right) = 0.3158,$$

$$v_{\text{st}}(0, 2) = \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B} \right)^2 = 0.2105,$$

ami valóban megegyezik a generátorból számolt stacionárius eloszlással.

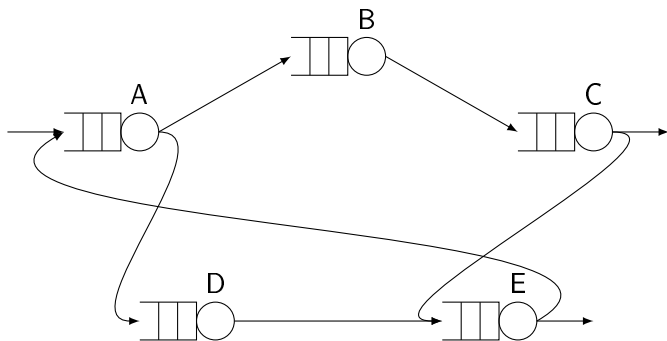
(d) Az egyes szerverek terhelése (kihasználtsága)

$$\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 0.6882 / 1.0 = 0.6882,$$

$$\rho_B = \lambda_B / \mu_B = 0.4588 / 1.0 = 0.4588.$$

4. feladat

Az alábbi hálózatban az A szerver M/M/1 típusú, kiszolgálási rátája $\mu_A = 4$; a B és C szerverek szintén M/M/1 típusúak, a kiszolgálási rátájuk rendre $\mu_B = 3$, $\mu_C = 4$; a D és E szerverek M/M/ ∞ típusúak, egy szál kiszolgálási rátája $\mu_D = \mu_E = 1$. A kívülről történő érkezési ráta $\gamma_A = 3$.



4. feladat

Az A szerverből egy kiszolgált igény 0.6 valószínűséggel a B, 0.4 valószínűséggel a D felé továbbítódik. A C szerverből egy kiszolgált igény 0.8 valószínűséggel az E szerver felé továbbítódik, 0.2 valószínűséggel elhagyja a rendszert. Az E szerverből egy igény 0.3 valószínűséggel az A szerver felé továbbítódik, 0.7 valószínűséggel pedig elhagyja a rendszert.

- (a) Stabil-e a hálózat?
- (b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?
- (c) Egy igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?

4. feladat

(a) Stabil-e a hálózat?

Megoldás. Az irányítási mátrix

$$(I - P)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

ahonnan a forgalmi egyenlet megoldása

$$\lambda = \gamma(I - P)^{-1} = (2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)(I - P)^{-1} = \\ (2.717 \ 1.630 \ 1.630 \ 1.087 \ 2.391).$$

4. feladat

(a) Mivel

$$\lambda_A = 2.7171 < \mu_A = 4,$$

$$\lambda_B = 1.630 < \mu_B = 3,$$

$$\lambda_C = 1.630 < \mu_C = 4$$

mind teljesül, ezért a rendszer stabil (a D és E szerverek M/M/ ∞ típusúak, ezért azok mindig stabilak).

(b) Az egyes szerverek terhelése

$$\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 0.679,$$

$$\rho_B = \lambda_B / \mu_B = 0.543,$$

$$\rho_C = \lambda_C / \mu_C = 0.408.$$

(A D és E szerverek kiszolgáló kapacitása végtelen, ezért ott nincs értelme a terhelésnek.)

4. feladat

(c) Egy igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?

Megoldás. Aszerint számoljuk össze, hogy melyik szerverben átlagosan hányszor jár az igény (ezt az $(I - P)^{-1}$ mátrix adja meg), valamint hogy ott átlagosan mennyi időt tölt:

- ▶ egy M/M/1 szerverben töltött idő átlagosan $\frac{1}{\mu_i - \lambda_i}$;
- ▶ egy M/M/ ∞ szerverben töltött idő átlagosan $\frac{1}{\mu_i}$ (nincs várakozás).

4. feladat

(c) Innen az átlagos rendszerben töltött idő

$$\begin{aligned} W = & [(I - P)^{-1}]_{1,1} \frac{1}{\mu_A - \lambda_A} + [(I - P)^{-1}]_{1,2} \frac{1}{\mu_B - \lambda_B} \\ & + [(I - P)^{-1}]_{1,3} \frac{1}{\mu_C - \lambda_C} + [(I - P)^{-1}]_{1,4} \frac{1}{\mu_D} \\ & + [(I - P)^{-1}]_{1,5} \frac{1}{\mu_E} = 3.738. \end{aligned}$$