

5. gyakorlat: PH eloszlások, fluid forgalmak

Kommunikációs hálózatok teljesítményének elemzése

Mészáros András

2024/11/07

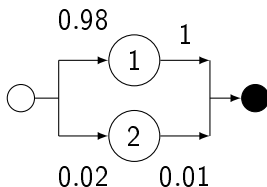
1. feladat

Egy szerver minden beérkező igényt 98% eséllyel normál üzemben kiszolgál, ilyenkor a kiszolgálási ráta 1 (1/s). Azonban 2% eséllyel a szerver „lefagy”, ilyenkor a kiszolgálási ráta 0.01 1/s. (A lefagyás bekövetkezte az igénytől és az előzményektől független.)

- (a) Milyen eloszlású egy véletlen igény kiszolgálási ideje?
- (b) Mennyi az átlagos kiszolgálási ideje egy véletlen igénynek?
- (c) Feltéve, hogy 5s alatt nem fejeződött be a kiszolgálás, mekkora a feltételes valószínűsége, hogy a szerver lefagyott?
- (d) Azt a policy-t vezetjük be, hogy ha egy igényt 5s alatt sem szolgál ki a szerver, akkor a kiszolgálást megszakítjuk, majd újra beküldjük az igényt. Átlagosan mennyi idő telik el az első beküldéstől a kiszolgálás végéig?

1. feladat

(a) Megoldás.



A kiszolgálási idő PH eloszlású (azon belül hiperexponenciális),

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -0.01 \end{bmatrix}, \quad \alpha = (0.98 \ 0.02)$$

paraméterekkel, sűrűségfüggvénye

$$f(t) = 0.98e^{-t} + 0.02 \cdot 0.01e^{-0.01t}.$$

1. feladat

(b) Mennyi az átlagos kiszolgálási ideje egy véletlen igénynek?

Megoldás. A normál kiszolgálás várható ideje 1, lefagyás esetén a kiszolgálás várható ideje $1/0.01 = 100$, így teljes várható érték tétel alapján

$$E(X) = 0.98 \cdot 1 + 0.02 \cdot 100 = 2.98.$$

Második megoldás.

$$\int_0^{\infty} tf(t)dt = 2.98.$$

1. feladat

- (c) Feltéve, hogy 5s alatt nem fejeződött be a kiszolgálás, mekkora a feltételes valószínűsége, hogy a szerver lefagyott?

Megoldás. Definiáljuk a következő eseményeket:

- ▶ A: 5s alatt nem fejeződik be a kiszolgálás;
- ▶ B1: nem fagyott le a szerver;
- ▶ B2: lefagyott a szerver.

Ekkor a teljes valószínűség tétel alapján

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|B1)P(B1) + P(A|B2)P(B2) = \int_5^{\infty} f(t)dt = \\ &= 0.98 \int_5^{\infty} e^{-t}dt + 0.02 \int_5^{\infty} 0.01e^{-0.01t}dt \approx 0.02563, \end{aligned}$$

és a Bayes-tétel alapján

$$P(B2|A) = \frac{P(A|B2)P(B2)}{P(A)} \approx \frac{0.01902}{0.02563} = 0.7423.$$

1. feladat

- (d) Azt a policy-t vezetjük be, hogy ha egy igényt 5s alatt sem szolgál ki a szerver, akkor a kiszolgálást megszakítjuk, majd újra beküldjük az igényt. Átlagosan mennyi idő telik el az első beküldéstől a kiszolgálás végéig?

Megoldás. Jelölje Y a módosított policy szerint szükséges időt. Ekkor Y két részre bontható:

$$Y = 5 \cdot (N - 1) + Z,$$

ahol N a próbálkozások száma, amíg lefut a kiszolgálás 5s-on belül, Z pedig az utolsó (sikeres) próbálkozással töltött idő.

$N \sim \text{GEO}(1 - P(A))$, ahol $P(A)$ annak a valószínűsége, hogy 5s alatt nem fejeződik be a kiszolgálás. $P(A) = 0.02563$ az előző részfeladatból.

1. feladat

- (d) Az utolsó (sikeres) próbálkozás viszont az eredeti X eloszlása azon feltétel mellett, hogy $X < 5$, aminek a várható értéke

$$E(Z) = E(X|X < 5) = \frac{\int_0^5 tf(t)dt}{1 - P(A)} \approx 0.9676,$$

összesen pedig

$$\begin{aligned} E(Y) &= 5E(N - 1) + E(Z) \\ &= 5 \left(\frac{1}{1 - P(A)} - 1 \right) + E(Z) \\ &= 0.1315 + 0.9676 = 1.0991. \end{aligned}$$

2. feladat

Egy üzemben két gép üzemel, A és B, melyek időnként elromlanak. Az A gép átlagosan hetente egyszer romlik el, a B gép átlagosan hetente kétszer; mindkét gép üzemideje exponenciális és független a másik géptől és az előzményektől.

A javításukkal egy szerelő foglalkozik, aki egyszerre egy gépet tud javítani. Ha elromlik egy gép, egyből szerelni kezdi. Az A gépet átlagosan 18, a B gépet átlagosan 12 óra alatt javítja meg; a javítási idő exponenciális eloszlású és független az előzményektől és a másik géptől. A javítás végén a gép egyből újból üzemelni kezd.

Egy adott időpontban mindkét gép üzemel. Adjuk meg az első olyan időpontnak az eloszlását, amikor mindkét gép leáll. Számítsuk ki a várható értékét és a szórását is.

2. feladat

Megoldás. A rendszernek 4-féle állapota van:

1. mindkét gép jó;
2. az A gép rossz;
3. a B gép rossz;
4. mindkét gép rossz.

A (4)-es állapot nyelőnek tekinthető, az abba való eljutás idejére vagyunk kíváncsiak. A másik 3 állapotban a szubgenerátor (az időegységet napnak véve)

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -1 & 1/7 & 2/7 \\ 4/3 & -(4/3 + 2/7) & 0 \\ 0 & 2 & -(2 + 1/7) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0.143 & 0.286 \\ 1.333 & -1.619 & 0 \\ 0 & 2 & -2.143 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

2. feladat

A kezdeti vektor $\alpha = (1 \ 0 \ 0)$. Az elnyelődésig eltelt idő $\text{PH}(\alpha, A)$ eloszlású.

A várható értéke és a szórása számolható a PH eloszlás általános momentum képletéből:

$$E(X) = -\alpha A^{-1} \mathbf{1} \approx 32.4,$$

$$E(X^2) = 2\alpha A^{-2} \mathbf{1} \approx 2075,$$

$$D(X) = \sqrt{E(X^2) - (E(X))^2} \approx 32.02.$$

3. feladat

Egy fluid szerver kiszolgálási sebessége 5 Mbps, és a szerverhez végtelen buffer tartozik. A szerverbe egy ON/OFF fluid forgalom érkezik, mely 2/s rátával kikapcsol, illetve 1/s rátával bekapcsol; amikor ad, akkor a sebessége 9 Mbps.

- (a) Stabil-e a sor?
- (b) Számítsuk ki az átlagos buffer szintet.
- (c) Mennyi a forgalom átlagos késleltetése?
- (d) A forgalom mekkora részének késleltetése nagyobb, mint 2 s?
- (e) Számítsuk ki $(S(t), X(t))$ stacionárius eloszlása alapján az átlagos kiszolgálási rátát.

3. feladat

(a) Stabil-e a sor?

A háttér Markov-lánc generátora

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$-2x_1 + x_2 = 0, \quad 2x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_2 = 1$$

egyenletekből $v_{\text{st}} = (1/3 \ 2/3)$, és

$$\sum_{i=1}^k \pi_i \lambda_i = \frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{2}{3} \cdot 0 = 3 < \mu = 5.$$

teljesül, tehát a sor stabil.

3. feladat

(b) Számítsuk ki az átlagos buffer szintet.

Megoldás. $(S(t), X(t))$ stacionárius eloszlása

$$f_1(x) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2}{9-5} - \frac{1}{5} \right) e^{-\left(\frac{2}{9-5} - \frac{1}{5}\right)x} = \frac{1}{10} e^{-3x/10},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot (9-5)}{5^2} e^{-\left(\frac{2}{9-5} - \frac{1}{5}\right)x} = \frac{2}{25} e^{-3x/10},$$

$$\ell_1 = 0,$$

$$\ell_2 = \frac{2 \cdot 5 - 1 \cdot (9-5)}{(1+2) \cdot 5} = \frac{2}{5}.$$

3. feladat

(b) Az átlagos buffer szint

$$\int_0^{\infty} x f_1(x) dx + \int_0^{\infty} x f_2(x) dx = \frac{10}{9} + \frac{8}{9} = 2 \text{ (Mb)}.$$

(c) Mennyi a forgalom átlagos késleltetése?

Megoldás. Mivel az érkezési folyamat nem homogén, így nem teljesül a PASTA elv, egy érkező véletlen csepp *nem* a bufferszint stacionárius eloszlását látja.

Először kiszámítjuk, mekkora egy véletlen érkező csepp által érkezéskor látott bufferszint várható értéke. Az ON illetve OFF állapotban látott átlagos bufferszintet súlyozzuk az ON illetve OFF állapotbeli érkezési rátával, és osztjuk az eredő érkezési rátával:

$$\frac{\lambda \cdot \int_0^{\infty} x f_1(x) dx + 0 \cdot \int_0^{\infty} x f_2(x) dx}{\pi_1 \lambda + \pi_2 \cdot 0} = \frac{9 \cdot 10/9 + 0 \cdot 8/9}{1/3 \cdot 9 + 2/3 \cdot 0} = \frac{10}{3} \text{ (Mb)}.$$

3. feladat

- (c) Tehát az egy véletlen csepp által érkezéskor látott átlagos bufferszint $10/3$ Mb. Mivel a kiszolgálási sebesség konstans $\mu = 5$ (Mbps), így az átlagos késleltetés

$$\frac{10/3}{5} = 2/3 \text{ (s)}.$$

- (d) A forgalom mekkora részének késleltetése nagyobb, mint $2s$?

Megoldás. $2s$ késleltetés $2s \cdot 5 \text{ Mbps} = 10 \text{ Mb}$ bufferszinthez tartozik. Innen az előzőhöz hasonló számítást kell végeznünk, csak az átlag helyett a 10 Mb-nél nagyobb bufferszintbe érkezésre.

$$\frac{\lambda \cdot \int_{10}^{\infty} f_1(x) dx + 0 \cdot \int_{10}^{\infty} f_2(x) dx}{\pi_1 \lambda + \pi_2 \cdot 0} \approx 0.0498.$$

3. feladat

- (e) Számítsuk ki $(S(t), X(t))$ stacionárius eloszlása alapján az átlagos kiszolgálási rátát.

4. feladat

Egy hálózatban 3 fluid szerver van, kiszolgálási sebességük rendre 3.0, 3.5, 6.0. A hálózatban 4 különböző prioritású forgalom van jelen, csökkenő prioritási sorrendben:

- (1) az érkezési rátája 1.6, és áthalad a 2-es és 3-as szervereken;
- (2) az érkezési rátája 2.4, és áthalad mindhárom szerveren;
- (3) az érkezési rátája 1.3, és áthalad az 1-es és 3-as szervereken;
- (4) az érkezési rátája 1.7, és áthalad a 3-as szerveren.

Minden forgalomról ütközés esetén instant és tökéletes visszazabályozást feltételezünk a hálózatba való belépési pontjukig visszamenőleg.

Számítsuk ki, melyik forgalom mekkora sebességre áll be. Adjuk meg azt is, melyik szervernek mekkora a kihasználtsága.

4. feladat

Megoldás. A legnagyobb prioritású forgalommal kezdjük. Az (1)-es forgalom által igényelt sávszélesség elfér a (2)-es és (3)-as szerveren is, így az első forgalomra

$$\lambda_{1,e} = \lambda_1 = 1.6$$

Az (1)-es forgalom után a még elérhető kiszolgálási sebesség az egyes szerverekben rendre 3.0, 1.9, 4.4.

A (2)-es forgalom által igényelt sebesség 2.4, ez a 2. szerveren való áthaladáskor visszaszabályoz, és

$$\lambda_{2,e} = 1.9.$$

A (2)-es forgalom után a még elérhető kiszolgálási sebesség az egyes szerverekben rendre 1.1, 0.0, 3.3.

4. feladat

A (3)-as forgalom által igényelt sebesség 1.3, ez az 1. szerveren való áthaladáskor visszaszabályoz, és

$$\lambda_{3,e} = 1.1.$$

A (3)-as forgalom után a még elérhető kiszolgálási sebesség az egyes szerverekben rendre 0.0, 0.0, 2.2.

A (4)-es forgalom által igényelt sebesség 1.7, ez elfér a 3. szerveren, és

$$\lambda_{4,e} = \lambda_4 = 1.7.$$

A (4)-es forgalom után a még elérhető kiszolgálási sebesség az egyes szerverekben rendre 0.0, 0.0, 0.5.

Az egyes szerverek kihasználtsága rendre 1, 1 és $(6.0 - 0.5)/6.0 = 0.917$.