

2. Valószínűségi generátorfüggvények

Sztochasztika

Horváth Illés

2024/10/30

Definíció

Egy X diszkrét valószínűségi változó valószínűségi generátorfüggvénye (vagy röviden generátorfüggvénye)

$$G(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k).$$

Példa. Ha X a dobás értéke egy szabályos hatoldalú dobókockával, akkor

$$G(z) = \frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{1}{6}z^6.$$

Példa. $X \sim PGEO(p)$ generátorfüggvénye

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p(1-p)^k z^k = p \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)z)^k = \frac{p}{1 - (1-p)z}.$$

Tulajdonságok

A generátorfüggvény alapvető tulajdonságai:



$$G(1) = \sum_{k=0}^{\infty} 1^k \mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1,$$



$$G(0) = \sum_{k=0}^{\infty} 0^k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(X = 0)$$

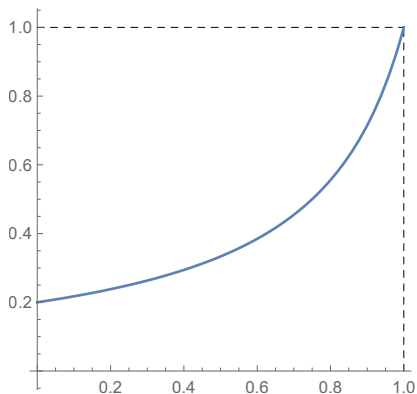
(mivel $0^0 = 1$),

- ▶ a sorösszeg konvergens $z \in [0, 1]$ -re,
- ▶ $G(z)$ analitikus $[0, 1)$ -en és folytonos $[0, 1]$ -en;
- ▶ $G(z)$ növény és konvex $[0, 1]$ -en.

Példa

Példa. PGEO(1/5) generátorfüggvénye

$$G(z) = \frac{1/5}{1 - (1 - 1/5)z} = \frac{1}{5 - 4z}.$$



Várható érték és szórás

Lemma

- ▶ $\mathbb{E}(X) = G'(1),$
- ▶ $\mathbb{D}(X) = \sqrt{G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2}.$

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} G'(z) \Big|_{z=1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (z^k)' \mathbb{P}(X = k) \Big|_{z=1} = \sum_{k=0}^{\infty} k z^{k-1} \mathbb{P}(X = k) \Big|_{z=1} = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} \mathbb{P}(X = k) \Big|_{z=1} = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X). \end{aligned}$$

Várható érték és szórás

$$\begin{aligned} G''(z)\Big|_{z=1} &= \sum_{k=0}^{\infty} (z^k)'' \mathbb{P}(X = k) \Big|_{z=1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} \mathbb{P}(X = k) \Big|_{z=1} = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} \mathbb{P}(X = k) \Big|_{z=1} = \\ &= \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - k) \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X), \end{aligned}$$

ahonnan

$$G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X) - (\mathbb{E}(X))^2 = \mathbb{D}^2(X).$$

Az eredeti eloszlás a generátorfüggvényből

Az eredeti eloszlás kiszámítható a generátorfüggvényből.

Lemma

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{G^{(k)}(z)|_{z=0}}{k!},$$

ahol $G^{(k)}$ a k -adik deriváltat jelöli.

Bizonyítás.

$$\begin{aligned} G^{(k)}(z)|_{z=0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) n(n-1) \cdots (n-k+1) z^k |_{z=0} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = n) n(n-1) \cdots (n-k+1) z^{n-k} |_{z=0} = \\ &= \mathbb{P}(X = k) k(k-1) \cdots (k-k+1) z^{k-k} |_{z=0} = \mathbb{P}(X = k) k! \end{aligned}$$

Az eredeti eloszlás a generátorfüggvényből

Konkrétan

$$\mathbb{P}(X = 0) = G(0),$$

$$\mathbb{P}(X = 1) = G'(0),$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{G''(0)}{2}$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \frac{G'''(0)}{6}$$

stb.

Két független valószínűségi változó összege

Tétel

Legyen X és Y két független nemnegatív valószínűségi változó, generátorfüggvényeik $G_X(z)$ és $G_Y(z)$. Ekkor

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z).$$

Bizonyítás (vázlat, példán keresztül). Legyen X és Y két szabályos 6-oldalú kockadobás eredménye. Számítsuk ki $\mathbb{P}(X + Y = 4)$ -et.

$$\mathbb{P}(X + Y = 4) =$$

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 1) = \\ \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3}{36}.$$

Két független valószínűségi változó összege

Másrészt számítsuk ki z^4 együtthatóját $G_X(z)G_Y(z)$ -ben:

$$G_X(z)G_Y(z) = \left(\frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \cdots + \frac{1}{6}z^6 \right) \left(\frac{1}{6}z^1 + \frac{1}{6}z^2 + \cdots + \frac{1}{6}z^6 \right).$$

z^4 -t kaphatunk úgy, hogy z^1 -t vesszük az első zárójelből és z^3 a második zárójelből, vagy $z^2 \cdot z^2$ -t, vagy $z^3 \cdot z^1$ -t. Ezek alapján z^4 együtthatója

$$\frac{1}{6}z^1 \cdot \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^2 \cdot \frac{1}{6}z^2 + \frac{1}{6}z^3 \cdot \frac{1}{6}z^1 = \frac{3}{36}z^4.$$

Tulajdonképpen a polinomszorzás pont azt számítja ki, amire szükségünk van.

Teljes valószínűség tétellel formálissá és általánossá is tehető a fenti számolás.

Független valószínűségi változók összege

A tétel értelemszerűen általánosítható több független valószínűségi változó összegére is; ha pl. X, Y, Z generátorfüggvénye rendre G_X, G_Y, G_Z , akkor

$$G_{X+Y+Z}(z) = G_X(z)G_Y(z)G_Z(z)$$

stb.

Ha $X_1, \dots, X_k$ független, azonos eloszlásúak (röviden fae) közös $G_X(z)$ generátorfüggvénnyel, akkor $Y = X_1 + \dots + X_k$ generátorfüggvénye

$$G_Y(z) = (G_X(z))^k.$$

Független valószínűségi változók összegét hívják konvolúciónak is (az eloszlásokra vagy sűrűségfüggvényekre ekvivalens a függvények konvolúciójával). A generátorfüggvény a konvolúciót szorzattá transzformálja (hasonlóan mint a Fourier- vagy Laplace-transzformált).

Determinisztikus számok

Determinisztikus számok is tekinthetők valószínűségi változónak: a k szám értéke 1 valószínűséggel k , és így a generátorfüggvénye z^k .

Ennek következményeként ha X generátorfüggvénye $G(z)$, akkor $X + 1$ generátorfüggvénye

$$G_{X+1}(z) = zG_X(z).$$

Vajon mi $2X$ generátorfüggvénye? $G(z^2)$ (gondoljuk meg).

Példa - binomiális eloszlás

Legyen $X \sim \text{BIN}(n, p)$. Számítsuk ki a $G(z)$ generátorfüggvényét.

X a sikeres próbák száma n független próbából, tehát ha minden sikeres próbára 1-et számolunk, minden sikertelenre pedig 0-t, akkor X felírható úgy, mint

$$X = Y_1 + \cdots + Y_n,$$

ahol $Y_1, \dots, Y_n$ független azonos Bernoulli változók közös $G_Y(z) = (1 - p) + pz$ generátorfüggvénnyel. Tehát

$$G(z) = ((1 - p) + pz)^n.$$

Példa - binomiális eloszlás

Másrészt $G(z)$ kiszámítható X eloszlásából közvetlenül is:

$$G(z) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k.$$

A binomiális tétel alapján a két képlet ekvivalens.

$$G(z) = ((1-p) + pz)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} z^k.$$

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Mivel $G(z) = \mathbb{E}(z^X)$, ezért a generátorfüggvényre alkalmazható a teljes várható érték tétel.

Példa. Egy szabályos hatoldalú kockával dobálunk. Legyen X az, hogy hányadik dobásra jön ki az első 6-os. Számítsuk ki X generátorfüggvényét.

Számítsuk ki $\mathbb{E}(z^X)$ értékét aszerint felbontva, hogy mi az első dobás értéke! Ha az első dobás 6-os, egyből készen is vagyunk, $X = 1$, tehát

$$\mathbb{E}(z^X | \text{első dobás 6-os}) = \mathbb{E}(z^1) = z.$$

Ha az első dobás nem 6-os, akkor dobtunk egyet, de utána ugyanolyan helyzetben vagyunk, mint eredetileg, tehát a hátralévő dobások számának eloszlása megegyezik X eloszlásával, ahonnan

$$\mathbb{E}(z^X | \text{első dobás nem 6-os}) = \mathbb{E}(z^{X+1}) = zG(z).$$

Teljes várható érték generátorfüggvényre

Innen a teljes várható érték tétel alapján

$$\begin{aligned} G(z) &= \mathbb{E}(z^X) = \\ &\mathbb{E}(z^X | \text{első dobás 6-os}) \mathbb{P}(\text{első dobás 6-os}) \\ &+ \mathbb{E}(z^X | \text{első dobás nem 6-os}) \mathbb{P}(\text{első dobás nem 6-os}) \\ &= \frac{1}{6}z + \frac{5}{6}zG(z). \end{aligned}$$

Ez egy lineáris egyenlet $G(z)$ -re, aminek megoldása

$$G(z) = \frac{z}{6 - 5z}.$$

Egyébként ezt onnan is le lehet vezetni, hogy $X \sim \text{GEO}(1/6)$:

$$G(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{6} \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} z^k = \frac{z}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5z}{6}\right)^{k-1} = \frac{z}{6} \cdot \frac{1}{1 - \frac{5z}{6}} = \frac{z}{6 - 5z}.$$

Véletlen tagszámú összeg

Legyenek $X_1, X_2, \dots$ független, azonos eloszlású diszkrét valószínűségi változók közös $G_X(z)$ generátorfüggvénnyel, és legyen N tőlük független diszkrét valószínűségi változó $G_N(z)$ generátorfüggvénnyel. Legyen

$$Y = X_1 + \dots + X_N,$$

vagyis Y egy véletlen tagszámú összeg. Számítsuk ki Y generátorfüggvényét.

Példa. Van egy piros és egy kék dobókockánk (mindkettő 6 oldalú és szabályos). Dobunk a kékkel, majd dobunk a pirossal annyiszor, amennyi a kéken kijött, és összeadjuk a piros dobások értékét. Mik a lehetséges értékei a piros dobások összegének?

Véletlen tagszámú összeg

Jelölje N a kék dobás értékét, és $X_1, X_2, \dots$ a piros dobások értékét. Ekkor $Y = X_1 + \dots + X_N$ a piros dobások összege.

Kiszámítjuk Y generátorfüggvényét.

Teljes várható érték tételt alkalmazunk N értéke szerint.

Ha $N = 1$, akkor $Y = X_1$, és Y generátorfüggvénye

$$\mathbb{E}(z^Y | N = 1) = \frac{1}{6}z^1 + \dots + \frac{1}{6}z^6.$$

Ha $N = 2$, akkor $Y = X_1 + X_2$, és Y generátorfüggvénye

$$\mathbb{E}(z^Y | N = 2) = (G_X(z))^2.$$

Ha $N = 3$, akkor $Y = X_1 + X_2 + X_3$, és Y generátorfüggvénye

$$\mathbb{E}(z^Y | N = 3) = (G_X(z))^3 \text{ stb.}$$

Véletlen tagszámú összeg

Összességében

$$G_Y(z) = \mathbb{E}(z^Y) = \sum_{n=1}^6 \mathbb{E}(z^Y | N = n) \mathbb{P}(N = n) = \\ \frac{1}{6} G_X(z) + \frac{1}{6} (G_X(z))^2 + \cdots + \frac{1}{6} (G_X(z))^6.$$

Tétel

Ha $X_1, X_2, \dots$ független azonos eloszlású diszkrét valószínűségi változók közös $G_X(z)$ eloszlásfüggvénnyel, és N tőlük független diszkrét valószínűségi változó $G_N(z)$ generátorfüggvénnyel, akkor $Y = X_1 + \cdots + X_N$ generátorfüggvénye

$$G_Y(z) = G_N(G_X(z)).$$

Példák

Valakinek az unokáinak száma véletlen tagszámú összeg: a gyermekeinek száma is véletlen, majd azok mindegyikének a gyermekeinek száma is véletlen.

Egy liftben utazó emberek összsúlya is véletlen tagszámú összeg.

Egy bolt napi bevétele is véletlen tagszámú összeg. Hasonlóan egy bankautomatából egy nap alatt kivett pénz mennyisége is az.

Összefoglalás

A generátorfüggvény egy számolási eszköz, amivel bizonyos típusú kérdések könnyen számolhatóvá válnak. A fő erényei a konvolúció és a véletlen tagszámú összeg kezelése, valamint az, hogy a teljes várható érték érvényes rá.

Olyan problémákra használható, ahol a vizsgált véletlen mennyiségek alapvetően diszkrét.

A gyakorlatban a transzformált tartományban elvégzett számítások végén vagy visszatranszformáljuk az eredményt (analitikusan, ha lehet, vagy numerikusan), vagy magából a generátorfüggvényből vonunk le következtetéseket (pl. várható érték, szórás).

Tulajdonságok

$$G(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) z^k.$$

$$G(1) = 1, \quad G(0) = \mathbb{P}(X = 0), \quad \mathbb{P}(X = k) = \frac{G^{(k)}(0)}{k!}$$

$$\mathbb{E}(X) = G'(1), \quad \mathbb{D}(X) = \sqrt{G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2}$$

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z) \quad X, Y \text{ függetlenre}$$

$$G_{X_1+\dots+X_N}(z) = G_N(G_X(z)) \quad X_1, X_2, \dots \text{ fae és } N \text{ függetlenre}$$

teljes várható érték tétel alkalmazható $G(z)$ -re

Hiányos generátorfüggvények

Néha olyan X valószínűségi változókkal dolgozunk, amelyek $+\infty$ -t is felvehetnek pozitív valószínűséggel. Ilyenkor

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) = 1 - \mathbb{P}(X = \infty) \leq 1.$$

A generátorfüggvény definíciója ettől még értelmes:

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k)z^k,$$

csak $G(1) = 1$ helyett ilyenkor

$$G(1) \leq 1,$$

és

$$\mathbb{P}(X = \infty) = 1 - G(1).$$

Hiányos generátorfüggvények

Példa. Jenő és Béla a következő játékot játsszák: egy érmét dobálnak; ha a dobás fej, Jenő fizet Bélának egy forintot, ha írás, akkor pedig Béla fizet Jenőnek egy forintot. Az érme azonban nem szabályos, a fej valószínűsége $2/3$, az írásé pedig $1/3$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy Jenő sohasem kerül nyeresébe?

Jelölje X azt, hogy hány kör után lesz először Jenő mérlege pozitív. Ha ez soha nem következik be, akkor $X = \infty$. Ki szeretnénk számítani X generátorfüggvényét, $G(z)$ -t.

Teljes várható érték tételt szeretnénk alkalmazni az első dobás értéke szerint. F a fej, I az írás.

Ha az első dobás írás, akkor $X = 1$, és

$$\mathbb{E}(z^X | I) = z^1 = z.$$

Hiányos generátorfüggvények

Ha az első dobás fej, akkor Jenő mérlege -1 -en áll. Innen még el kell jutnia először a 0 -ra, majd az 1 -re.

A (-1) -ről 0 -ra eljutáshoz szükséges lépésszám ugyanolyan eloszlású, mint eredetileg a 0 -ról 1 -re eljutás ideje.

Utána a 0 -ról 1 -re eljutáshoz szükséges lépésszám szintén ugyanilyen eloszlású, és független a (-1) -ről 0 -ra eljutáshoz szükséges lépésszámtól. Ez alapján

$$\mathbb{E}(z^X|F) = z(G(z))^2,$$

és a teljes várható érték tétel szerint

$$\mathbb{E}(z^X) = G(z) = \frac{1}{3}z + \frac{2}{3}z(G(z))^2.$$

Hiányos generátorfüggvények

Ez egy másodfokú egyenlet $\mathbb{E}(z^X) = G(z)$ -re, melynek megoldásai

$$G(z) = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 8z^2}}{4z}.$$

Azt, hogy $+$ vagy $-$ van a valódi megoldásban, a $z = 0$ behelyettesítéssel tudjuk eldönteni. Mivel $G(0) = \mathbb{P}(X = 0)$, és 0 lépésben Jenő nem kerülhet nyeresébe, ezért $G(0) = 0$ kell teljesülnön.

A pluszos tag $z = 0$ esetén $\frac{\infty}{0}$ típusú, ami nem jó, $G(0) = 0$ nem teljesül.

A mínuszos tagba behelyettesítve $\frac{0}{0}$ alakú törtet kapunk; L'Hôpital szabály alapján $z \rightarrow 0$ esetén a limesz 0, tehát ez a valódi megoldás.

Hiányos generátorfüggvények

Tehát X generátorfüggvénye

$$G(z) = \frac{3 - \sqrt{9 - 8z^2}}{4z}.$$

Az eredeti kérdésre a válasz pedig

$$\mathbb{P}(\text{Jenő sohasem kerül nyeresbe}) = \mathbb{P}(X = \infty) = 1 - G(1) = \frac{1}{2}.$$

Egyéb transzformáltak

Egy X diszkrét valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$G(z) = \mathbb{E}(z^X) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \mathbb{P}(X = k).$$

Egy $X \geq 0$ folytonos valószínűségi változó Laplace-transzformáltja

$$X^*(s) = E\left(e^{-sX}\right) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

ahol $f(t)$ az X sűrűségfüggvénye.

Egy $X \in \mathbb{R}$ folytonos valószínűségi változó Fourier-transzformáltja

$$\phi_X(t) = E\left(e^{-itX}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} f(x) dx,$$

ahol $f(x)$ az X sűrűségfüggvénye.

1. feladat

Egy X valószínűségi változó generátorfüggvénye

$$G(z) = \frac{3}{8} + \frac{3}{8}z + \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{8}z^3.$$

Határozzuk meg az eloszlását (azaz a $\mathbb{P}(X = k)$ valószínűségeket).
Határozzuk meg X várható értékét és szórását is.

Megoldás.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X = 0) &= \frac{3}{8}, & \mathbb{P}(X = 1) &= \frac{3}{8}, \\ \mathbb{P}(X = 2) &= \frac{1}{8}, & \mathbb{P}(X = 3) &= \frac{1}{8}, \\ \mathbb{P}(X = 4) &= \mathbb{P}(X = 5) = \dots = 0.\end{aligned}$$

1. feladat

$$G'(z) = \frac{3}{8} + \frac{2}{8}z + \frac{3}{8}z^2,$$
$$G''(z) = \frac{2}{8} + \frac{6}{8}z,$$

és így

$$G'(1) = 1, \quad G''(1) = 1$$

és

$$\mathbb{E}(X) = G'(1) = 1,$$

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{G''(1) + G'(1) - (G'(1))^2} = \sqrt{1 + 1 - 1^2} = 1.$$

2. feladat

Adjunk meg két olyan hatoldalú X és Y dobókockát, melyek nem cinkeltek (azaz minden oldalukra egyforma eséllyel esnek), az oldalaikon pozitív egészek állnak, és $X + Y$ eloszlása pont ugyanaz, mint szokásos (1-től 6-ig számozott) hatoldalú dobókockával két dobás összege, de X és Y nem a szokásos dobókockák.

Két szokásos dobás összegének a generátorfüggvénye

$$\left(\frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \cdots + \frac{1}{6}z^6 \right)^2.$$

Ezt kéne másféle módon $G_1(z)G_2(z)$ szorzattá alakítani.

2. feladat

Először alakítsuk szorzattá egy darab szabályos dobókocka generátorfüggvényét.

$$\frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \cdots + \frac{1}{6}z^6 = \frac{1}{6}z(z+1)(z^2+z+1)(z^2-z+1).$$

Tehát

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^2 + \cdots + \frac{1}{6}z^6 \right)^2 = \\ \left(\frac{1}{6} \right)^2 z^2 (z+1)^2 (z^2+z+1)^2 (z^2-z+1)^2. \end{aligned}$$

2. feladat

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2 z^2(z+1)^2(z^2+z+1)^2(z^2-z+1)^2.$$

- ▶ Az $\left(\frac{1}{6}\right)^2$ tényezőket muszáj $\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$ alakban kettészedni, mivel nem cinkelt dobókockákról van szó, tehát a valószínűségek $\frac{1}{6}$ egész többszörösei kell legyenek.
- ▶ A z^2 tényezőket muszáj $z \cdot z$ alakban kettészedni, különben valamelyik dobókockán lenne 0.
- ▶ A többi tényezőre $G(1) = 1$ alapján van még megkötés;

$$(1+z)|_{z=1} = 2, \quad (z^2+z+1)|_{z=1} = 3$$

miatt ezeket a tényezőket is muszáj egy-egyben kettéosztani.

2. feladat

Az utolsó kettéosztandó tényező a $(z^2 - z + 1)^2$. Ennek értéke $z = 1$ -ben 1, tehát ez nem jelent megkötést. Ha ezt is egy-egyben osztjuk szét, akkor visszakapjuk a két szabályos dobókockát.

De ha mindkettőt egy oldalra rakjuk, akkor

$$G_1(z) = \frac{1}{6}z(z+1)(z^2+z+1) = \frac{1}{6}z + \frac{2}{6}z^2 + \frac{2}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4,$$

$$\begin{aligned} G_2(z) &= \frac{1}{6}z(z+1)(z^2+z+1)(z^2-z+1)^2 = \\ &= \frac{1}{6}z + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{6}z^4 + \frac{1}{6}z^5 + \frac{1}{6}z^6 + \frac{1}{6}z^8, \end{aligned}$$

a dobókockákra pedig ennek megfelelően a következő számok kerülnek:

- ▶ 1, 2, 2, 3, 3, 4;
- ▶ 1, 3, 4, 5, 6, 8.

3. feladat

Anna levelet küld Bélának. A posta megbízhatatlan; minden egyes napon $1/3$ eséllyel viszi be a levelet a postás a központba, az előzményektől függetlenül. Ha a levél beért a központba, minden egyes napon $1/5$ eséllyel feldolgozzák, az előzményektől függetlenül. Ha feldolgozták, onnan a kézbesítés fix 1 napot vesz igénybe. (Tehát legjobb esetben 1 nap alatt kézbesítik is a levelet.) Jelölje X azt, hogy a feladástól számítva hány nap alatt kézbesítik a levelet. Számítsuk ki X generátorfüggvényét és várható értékét.

3. feladat

Megoldás. X felírható

$$X = X_1 + X_2 + X_3,$$

alakban, ahol

- ▶ X_1 az, hogy hány nap alatt viszi be a postás a központba,
- ▶ X_2 az, hogy hány nap alatt dolgozzák fel a központban,
- ▶ X_3 az, hogy hány nap alatt kézbesítik a feldolgozás után.

X_1, X_2 és X_3 függetlenek. Milyen eloszlásúak?

3. feladat

$$X_1 \sim \text{PGEO}(1/3), \quad G_1(z) = \frac{1}{3 - 2z}, \quad \mathbb{E}(X_1) = 2,$$

$$X_2 \sim \text{PGEO}(1/5), \quad G_2(z) = \frac{1}{5 - 4z}, \quad \mathbb{E}(X_2) = 4,$$

$$X_3 = 1, \quad G_3(z) = z, \quad \mathbb{E}(X_3) = 1.$$

(Azt, hogy pesszimista vagy sima geometriai, onnan lehet tudni, hogy „legjobb esetben 1 nap alatt kézbesítik” a levelet.)

Tehát

$$G(z) = G_1(z)G_2(z)G_3(z) = \frac{1}{3 - 2z} \cdot \frac{1}{5 - 4z} \cdot z,$$

$$\mathbb{E}(X) = G'(1) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) + \mathbb{E}(X_3) = 2 + 4 + 1 = 7.$$

4. feladat

- (a) Jelölje X egy szabályos kockával az első 6-osig szükséges dobások számát. Határozzuk meg X generátorfüggvényét kétféle módon is: egyrészt közvetlenül az eloszlásából, másrészt teljes várható érték tétellel.
- (b) Egy szabályos hatoldalú dobókockával dobálunk. Jelölje Y az ahhoz szükséges dobások számát, hogy két 6-os jöjjön egymás után (tehát pl. a 6134622665 sorozat esetén $Y = 9$). Számítsuk ki Y generátorfüggvényét.

Megoldás. Az (a) részt már megnéztük, és

$$G_X(z) = \frac{z}{6 - 5z}.$$

4. feladat

Y -t írjuk fel

$$Y = X + Z$$

alakban, ahol X ismét az első hatosig szükséges dobások száma, és Z a maradék dobások száma az első hatos után. X és Z függetlenek, ezért

$$G_Y(z) = G_X(z)G_Z(z).$$

4. feladat

Teljes várható érték tételt alkalmazunk $G_Y(z)$ -re az első hatos *utáni* dobás értéke alapján. Ha az is hatos, akkor készen vagyunk: $Z = 1$, és $G_Y(z) = G_X(z)z$. Ennek a valószínűsége $1/6$.

Ha az első hatos utáni dobás nem hatos (ennek a valószínűsége $5/6$), akkor úgymond kezdhethük előlről az egészet, csak már volt $X + 1$ dobásunk. Ennek megfelelően

$$G_Y(z) = \mathbb{E}(z^Y) = \frac{1}{6}zG_X(z) + \frac{5}{6}zG_X(z)G_Y(z),$$

ami egy lineáris egyenlet $G_Y(z)$ -re, és a megoldása

$$G_Y(z) = \frac{z^2}{36 - 30z - 5z^2}, \quad \text{és} \quad G'_Y(1) = 42.$$

7. feladat

Egy vizsga A és B részből áll. A B részen csak azok a diákok vehetnek részt, akik az A részen átmentek. Minden egyes diák 0,6 valószínűséggel megy át az A részen (a többiektől függetlenül). Minden diák, aki átment az A részen, 0,5 valószínűséggel megy át a B részen (újfent a többiektől függetlenül). 100 diák vesz részt a vizsgán. Jelölje X azok számát, akik átmentek az A részen, Y pedig azok számát, akik átmentek mindkét részen. Milyen eloszlású X ? Számítsuk ki G_X -et (X generátorfüggvényét), majd ennek segítségével G_Y -t is. G_Y -ből mondjuk meg Y eloszlását.

7. feladat

Megoldás. Y felírható

$$Y = Z_1 + \cdots + Z_X,$$

alakban, ahol $Z_1, \dots, Z_X$ az A részen átment diákok eredménye a B részen: Z_i értéke 1, ha a diák átment a B részen és 0, ha nem. A Z_i -k független, azonos eloszlásúak (fae), közös generátorfüggvényük

$$G_Z(z) = 0.5 + 0.5z.$$

$X \sim \text{BIN}(100, 0.6)$, tehát

$$G_X(z) = (0.4 + 0.6z)^{100}, \quad \text{és}$$

$$G_Y(z) = G_X(G_Z(z)) = (0.4 + 0.6(0.5 + 0.5z))^{100} = (0.7 + 0.3z)^{100},$$

ami éppen a $\text{BIN}(100, 0.3)$ generátorfüggvénye.

7. feladat

Egy másik lehetőség annak indoklására, hogy $Y \sim \text{BIN}(100, 0.3)$ a következő. Minden egyes diákra annak a valószínűsége, hogy átmegy az A és a B részen is, teljes valószínűség alapján

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{átmegy B-n}) &= \mathbb{P}(\text{átmegy B-n} | \text{átmegy A-n}) \mathbb{P}(\text{átmegy A-n}) + \\ &+ \mathbb{P}(\text{átmegy B-n} | \text{nem megy át A-n}) \mathbb{P}(\text{nem megy át A-n}) = \\ &= 0.5 \cdot 0.6 + 0 \cdot 0.4 = 0.3,\end{aligned}$$

tehát mind a 100 diák a többiektől függetlenül 0.3 eséllyel megy át A-n és B-n is.

7. feladat

Ez megfogalmazható a következő általános lemmában.

Lemma

Ha $N \sim \text{BIN}(n, p)$ és $X_1, X_2, \dots$ fae Bernoulli eloszlásúak q paraméterrel, akkor

$$Y = X_1 + \dots + X_N$$

eloszlása $\text{BIN}(n, pq)$.