

9. Jackson-hálózatok

Sztochasztika

Horváth Illés

2025/11/25

Vázlat

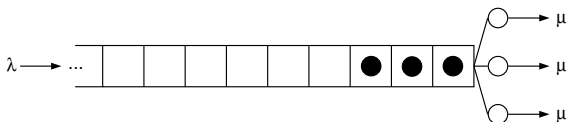
- (1) Emlékeztető: Markov-sorok
- (2) Kimenő folyamat, Burke-tétel
- (3) Jackson-hálózatok
- (4) Forgalmi egyenlet, stabilitási feltétel
- (5) Rendszerben töltött idő
- (6) Stacionárius eloszlás
- (7) Zárt hálózatok
- (8) Feladatok

$M/M/1$, $M/M/c$ és $M/M/\infty$ sor

Emlékeztető. $M/M/1$ sor: 1 szerver, FIFO (érkezési sorrend szerinti) kiszolgálás, végtelen buffer.



Az $M/M/c$ sorban c szerver (kiszolgáló egység) van és végtelen buffer:



Az $M/M/\infty$ sorban minden igény azonnal elkezd fix μ rátájú kiszolgálást kapni.

M/M/1, M/M/c és M/M/ ∞ sor

Tétel.

- (a) Egy M/M/1 sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \lambda/\mu < 1$, és ilyenkor a stacionárius eloszlása PGEO($1 - \rho$).
- (b) Egy M/M/c sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$, és a stacionárius eloszlása

$$x_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)} \right]^{-1},$$
$$x_k = \begin{cases} x_0 \frac{(c\rho)^k}{k!} & \text{ha } 0 \leq k \leq c-1, \\ x_0 \frac{c^c \rho^k}{c!} & \text{ha } k \geq c. \end{cases}$$

- (c) Egy M/M/ ∞ sor mindig stabil, és a stacionárius eloszlása POI(λ/μ).

Átlagos sorban töltött idő, sorban töltött idő eloszlása

Tétel.

Egy $M/M/1$ sorban egy igény sorban töltött idejének eloszlása $EXP(\mu - \lambda)$, az átlagos sorban töltött ideje $\frac{1}{\mu - \lambda}$.

Tétel.

Egy $M/M/\infty$ sorban egy igény sorban töltött idejének eloszlása $EXP(\mu)$, az átlagos sorban töltött ideje $\frac{1}{\mu}$.

($M/M/c$ sorra is van explicit képlet, csak ronda, azt nem nézzük meg.)

Kimenő folyamat

Tétel. (Burke)

Tekintsünk egy $M/M/1$, $M/M/c$ vagy $M/M/\infty$ sort λ érkezési rátával, és tegyük fel, hogy a sor stabil és stacionárius.

Ekkor a sor kimenő folyamata λ paraméterű Poisson-pontfolyamat.

Nem biz., de ($M/M/1$ sorra) egy lehetséges bizonyítás azon alapszik, hogy a sort időben visszafelé nézve is pont egy $M/M/1$ sort látunk.

Megjegyzés. A kimenő folyamatban nem játszik szerepet a szerver kiszolgálási rátája. (Csak annyiban, hogy a feltételek között szerepel, hogy a sor stabil.)

Sorbanállási hálózatok

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző serverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Példák:

- ▶ adatcsomagok/kommunikációs igények továbbítása;
- ▶ hivatali ügyintézés;
- ▶ egy gyárban az alkatrészek megmunkálása.

Egy hálózat lehet *nyílt*, ilyenkor érkezhetnek új igények a rendszerbe, illetve igények távozhatnak is a rendszerből.

A másik lehetőség a *zárt* hálózat, ilyenkor nincsenek a rendszerből távozó és érkező igények, hanem a bent lévő igények száma állandó.

Sorbanállási hálózatok

Tipikus kérdések:

- ▶ stabilitás feltétele az egész rendszerre;
- ▶ a rendszer stacionárius állapota;
- ▶ az egyes csomóponti szerverek kihasználtsága;
- ▶ átlagos késleltetés az egyes csomópontoknál és az egész rendszerre;
- ▶ rendszerben töltött idő eloszlása.

Nyílt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük nyílt Jackson-hálózatnak:

- ▶ a hálózatban m darab $M/M/1$, $M/M/c$ vagy $M/M/\infty$ szerver van, az i -edik szerver kiszolgálási rátája μ_i , az i -edik szerverben a kiszolgáló egységek száma c_i ;
- ▶ az i -edik szerverhez a külső igények egy γ_i paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek (a különböző szerverekhez függetlenül);
- ▶ ha az i -edik szerver kiszolgált egy igényt, az igény P_{ij} valószínűséggel beáll a j -edik szerver sorába, illetve $1 - \sum_{j=1}^m P_{ij}$ valószínűséggel távozik a rendszerből.

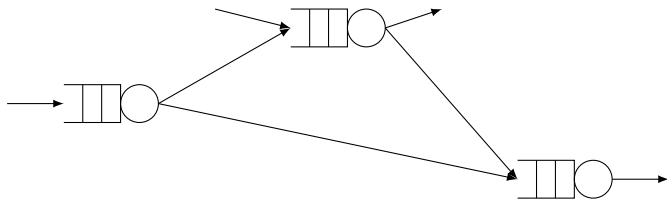
A P ún. *irányítási mátrix* tulajdonságai:

- ▶ $P_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, m,$
- ▶ $\sum_{j=1}^m P_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m$ -re, és legalább egy i -re $< \text{áll}$.

Az ilyen tulajdonságú mátrixokat szubsztocasztikus mátrixoknak hívjuk.

Aciklikus Jackson-hálózatok

A nyílt Jackson-hálózatokon belül egy hálózat aciklikus, ha a szerverek sorba rendezhetők úgy, hogy a szerverek között mindig csak előre felé van forgalom (vagyis nincs visszacsatolás).



Ilyenkor $i > j$ -re $P_{ij} = 0$, azaz P felső-háromszög mátrix.

Aciklikus Jackson-hálózatok

Emlékeztető. Poisson-folyamatokra Unió és Ritkítás tétel.

Ha valamelyik szerver érkezési folyamata egy λ_i paraméterű Poisson-folyamat, akkor a Burke-tétel szerint a kimenő folyamata is az, ami aztán a ritkítás tétel miatt (kisebb paraméterű) Poisson-folyamatokra oszlik és járul hozzá a későbbi szerverek érkezési folyamatához.

Mivel a hálózat aciklikus, ezért bármelyik szerver bemenetén független Poisson-folyamatok találkoznak, így az unió tétel miatt a későbbi szerverek bemenete is Poisson-folyamat.

Aciklikus Jackson-hálózat stabilitása

A külső érkezéseket is figyelembe véve az i -edik szerver bemeneti rátája

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j P_{ji}.$$

Ez a λ_i -kre egy lineáris egyenletrendszer, ami sorban előre haladva expliciten megoldható.

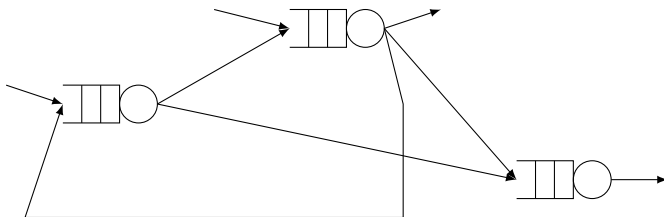
Tétel.

Egy aciklikus Jackson-hálózat pontosan akkor stabil, ha

- ▶ *az összes $M/M/1$ szerverre $\lambda_i < \mu_i$, és*
- ▶ *az összes $M/M/c$ szerverre $\lambda_i < c_i \mu_i$.*

Forgalmi egyenlet

Olyan nyílt Jackson-hálózatokra, amikben van visszacsatolás, az egyes szerverek bemenetén található folyamatok függetlensége sérülhet.



Emiatt a bemeneteken már nem feltétlenül lesznek Poisson-folyamatok.

Nyílt Jackson-hálózatok

Ezzel együtt a hosszú távú átlagos érkezési rátáról van értelme beszélni, és azzal hasonlóan lehet számolni, mint a Poisson-folyamat paraméterével.

Azt mondjuk, hogy az i -edik szerver érkezési rátája λ_i , ha hosszú T idő alatt $\lambda_i T + o(T)$ igény érkezik.

Ilyenkor a szerver kimenő rátája is λ_i , ami a P_{ij} valószínűségek szerint oszlik szét és járul hozzá a többi szerver érkezési rátájához.

A külső érkezéseket is figyelembe véve ez ismét csak összefoglalható egy lineáris egyenletrendszerbe:

Tétel. (Forgalmi egyenlet)

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j P_{ji}.$$

Forgalmi egyenlet

Mátrix-vektor alakban a forgalmi egyenlet

$$\lambda(I - P) = \gamma;$$

Ha $I - P$ invertálható (ehhez elégséges, ha minden szerverből a forgalom egy része előbb-utóbb távozik a rendszerből), akkor a megoldás

$$\lambda = \gamma(I - P)^{-1}.$$

Stabilitás, kihasználtság

Tétel. (Stabilitás feltétele)

Egy nyílt Jackson-hálózat pontosan akkor stabil, ha

- ▶ az összes $M/M/1$ szerverre $\lambda_i < \mu_i$, és
- ▶ az összes $M/M/c$ szerverre $\lambda_i < c_i \mu_i$.

Tétel.

Az egyes szerverek kihasználtsága $i = 1, \dots, m$ -re rendre

- ▶ az $M/M/1$ szerverekre $\frac{\lambda_i}{\mu_i}$,
- ▶ az $M/M/c$ szerverekre $\frac{\lambda_i}{c_i \mu_i}$.

(És az $M/M/\infty$ szerverekkel mi a helyzet?)

Látogatások száma

Jelölje $L_{i,j}$ azt, hogy egy igény hányszor látogatja meg a j -edik szervert a rendszerből való távozásáig, feltéve, hogy most az i -edik szerverben van.

Lemma

$$E(L_{i,j}) = [(I - P)^{-1}]_{i,j}$$

Biz. Az i -edik szerverből indulva a j -edik szerverbe való látogatások számának várható értéke teljes várható érték tétel alapján

$$E(L_{i,j}) = \delta_{i,j} + \sum_{k=1}^m P_{ik} E(L_{k,j}),$$

ami mátrix alakban írva

$$E(L) = I + P \cdot E(L),$$

aminek a megoldása éppen

$$E(L) = (I - P)^{-1}.$$

Átlagos rendszerben töltött idő

Tétel. (Átlagos rendszerben töltött idő)

Tegyük fel, hogy egy nyílt Jackson-hálózatban minden sor $M/M/1$. Ha egy igény beáll az i -edik sorba, akkor onnantól a rendszerből való távozásig szükséges idő várható értéke

$$\sum_{j=1}^m [(I - P)^{-1}]_{i,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j}.$$

Biz. Aszerint számoljuk össze, hogy melyik sorba hányszor állt be, és ott mennyi időt töltött.

Ha $M/M/\infty$ sorok is vannak a hálózatban, akkor azokra az $\frac{1}{\mu_j - \lambda_j}$ tagot ki kell cserélni $\frac{1}{\mu_j}$ -re. (Sőt, igazából $M/M/c$ sorokra is működne, csak arra nem néztük meg a sorban töltött idő várható értékének az explicit képletét.)

Stacionárius eloszlás

Egy Jackson-hálózat pillanatnyi állapotát a $(k_1, \dots, k_m)$ vektor írja le, ahol k_i az i -edik sorban álló igények száma. A $(k_1, \dots, k_m)$ vektorra teljesül a Markov-tulajdonság.

Ha a hálózat stabil, akkor pontosan egy stacionárius eloszlás létezik, és a hálózat bármilyen kezdeti értékből indítva a stacionárius eloszláshoz konvergál.

Tétel. (Jackson)

Egy stabil nyílt Jackson-hálózat stacionárius eloszlása

$$v_{st}(k_1, \dots, k_m) = \prod_{i=1}^m \pi_i(k_i),$$

ahol $\pi_i(\cdot)$ a megfelelő $M/M/1$, $M/M/c$ vagy $M/M/\infty$ sor stacionárius eloszlása.

Stacionárius eloszlás

Speciálisan ha minden sor M/M/1, akkor az i -edik sor stacionárius eloszlása PGEO(ρ_i), és a teljes rendszer stacionárius eloszlása

$$v_{\text{st}}(k_1, \dots, k_m) = \prod_{i=1}^m \rho_i^{k_i} (1 - \rho_i),$$

ahol $\rho_i = \lambda_i / \mu_i$.

A Jackson-tételt nem biz., de csak annyit kell tenni, hogy ellenőrizzük, hogy a megadott eloszlás teljesíti a stacionárius eloszlás definícióját. A számolás végül a forgalmi egyenletre egyszerűsödik.

A Jackson-tétel szerint a rendszer stacionárius eloszlása *szorzat alakú*: egybeesik azzal, mintha a sorok független M/M/1, M/M/c illetve M/M/ ∞ sorok lennének.

Mit lát egy beérkező igény?

Emlékeztető: a PASTA elv azt mondta ki, hogy ha egy Markov-sorban az érkezési folyamat Poisson-folyamat, akkor minden egyes beérkező igény a stacionárius sorhossz eloszlást látja.

Ez igaz nyílt Jackson-hálózatokra is, Érkezési tétel néven (Arrival Theorem).

Tétel. (Érkezési tétel)

Bármely igénynek bármely sorba való érkezésekor a látott (beérkezési pillanat előtti) sorhosszak együttes eloszlása a teljes hálózatban stacionárius.

Bármely igény rendszerből való távozásakor a távozás utáni pillanatban látott sorhosszak együttes eloszlása a teljes hálózatban stacionárius.

Nem biz.

Zárt Jackson-hálózatok

A következőt nevezzük zárt Jackson-hálózatnak vagy Gordon–Newell-hálózatnak:

- ▶ a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i -edik szerver kiszolgálási rátája μ_i ;
- ▶ ha az i -edik szerver kiszolgált egy igényt, az igény P_{ij} valószínűséggel beáll a j -edik szerver sorába.

Figyelem: M/M/c és M/M/ ∞ most nem megengedett!

Ezúttal feltesszük, hogy nincsenek sem érkező igények, sem távozó igények, a rendszerben lévő igények száma állandó.

Ilyenkor minden $i = 1, \dots, m$ -re

$$\sum_{j=1}^m P_{ij} = 1,$$

az irányítási mátrix sztochasztikus.

Zárt Jackson-hálózatok

Zárt Jackson-hálózatokra nem kell stabilitást vizsgálni.

A forgalmi egyenletben nincs külső érkezés:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^m P_{ji} \lambda_j.$$

Ilyenkor a megoldás csak konstans szorzó erejéig egyértelmű; a normalizálás a rendszerben keringő igények számából jön majd.

Jelölje a rendszerben lévő igények (fix) számát K .

Zárt Jackson-hálózatok

Tétel. (Gordon–Newell)

A stacionárius eloszlás

$$v_{st}(k_1, \dots, k_m) = \prod_{j=1}^m \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j} \right)^{k_j},$$

ahol λ_j -k teljesítik a forgalmi egyenletet, és

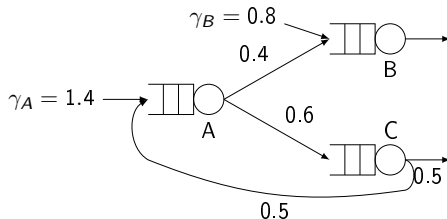
$$\sum_{\substack{(k_1, \dots, k_m): \\ k_1 + \dots + k_m = K}} \prod_{j=1}^m \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j} \right)^{k_j} = 1.$$

(Ezzel az egyenlettel a λ_j -k már egyértelműen meghatározottak.)

Biz. Ugyanúgy csak ellenőrizni kell a stacionárius eloszlás egyenleteit, mint nyílt hálózatokra.

1. feladat

Az alábbi hálózatban mindhárom szerver FIFO, a kiszolgálási rátájuk rendre $\mu_A = 2.5$, $\mu_B = 1.7$, $\mu_C = 1.5$.



- (a) Stabil-e a hálózat?
- (b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?
- (c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?
- (d) Mi a rendszer stacionárius eloszlása?

1. feladat

(a) Stabil-e a hálózat?

Megoldás. A P irányítási mátrix a következő:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Legyen

$$\gamma = (\gamma_A \ \gamma_B \ \gamma_C) = (1.4 \ 0.8 \ 0), \quad \lambda = (\lambda_A \ \lambda_B \ \lambda_C).$$

Az egyes szerverek érkezési rátáját a forgalmi egyenletből tudjuk kiszámítani:

$$\lambda(I - P) = \gamma.$$

1. feladat

(a) A forgalmi egyenlet megoldása

$$\lambda = (2.0 \ 1.6 \ 1.2),$$

így

$$\lambda_A = 2.0 < \mu_A = 2.5,$$

$$\lambda_B = 1.6 < \mu_B = 1.7,$$

$$\lambda_C = 1.2 < \mu_C = 1.5$$

mind teljesül, a rendszer stabil.

1. feladat

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

Megoldás.

$$\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 0.800,$$

$$\rho_B = \lambda_B / \mu_B = 0.941,$$

$$\rho_C = \lambda_C / \mu_C = 0.800.$$

1. feladat

- (c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben? Megoldás.

$$(I - P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.429 & 0.571 & 0.857 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.714 & 0.286 & 1.429 \end{bmatrix},$$

és

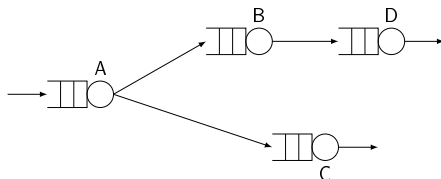
$$\sum_{j=1}^m [(I - P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} = 11.43.$$

- (d) A rendszer stacionárius eloszlása

$$\begin{aligned} v_{\text{st}}(k_A, k_B, k_C) &= (1 - \rho_A) \rho_A^{k_A} (1 - \rho_B) \rho_B^{k_B} (1 - \rho_C) \rho_C^{k_C} = \\ &= 0.00235 \cdot 0.8^{k_A + k_C} \cdot 0.941^{k_B}. \end{aligned}$$

2. feladat

Az alábbi hálózatban minden szerver M/M/1 típusú, az egyes szerverek kiszolgálási rátája rendre $\mu_A = 6.0$, $\mu_B = 2.0$, $\mu_C = 4.0$, $\mu_D = 3.0$. A kívülről történő érkezések rátája $\gamma_A = 2.5$. Az A szerverből kimenő igények p valószínűséggel a B, $1 - p$ valószínűséggel a C szerver sorába állnak be.



- (a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?
- (b) Jellemezzük a D szerver érkezési folyamatát.
- (c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.
- (d) A p paraméter mely értékére lesz az átlagos rendszerben töltött idő minimális?

2. feladat

(a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?

Megoldás. Ez egy aciklikus hálózat, az irányítási mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A forgalmi egyenlet megoldható expliciten:

$$\lambda_A = \gamma_A = 2.5,$$

$$\lambda_B = p\lambda_A = 2.5p,$$

$$\lambda_C = (1-p)\lambda_A = 2.5(1-p),$$

$$\lambda_D = \lambda_B = 2.5p.$$

2. feladat

(a) A hálózat pontosan akkor stabil, ha

$$\lambda_A = 2.5 < \mu_A = 6.0,$$

$$\lambda_B = 2.5p < \mu_B = 2.0,$$

$$\lambda_C = 2.5(1 - p) < \mu_C = 4.0,$$

$$\lambda_D = 2.5p < \mu_D = 3.0$$

mindegyike fennáll, ahonnan

$$0 \leq p < 0.8$$

kell teljesülnön.

(b) Jellemezzük a D szerver érkezési folyamatát.

Megoldás. Aciklikus hálózatban ha a külső érkezési folyamatok független Poisson-pontfolyamatok, akkor az egyes szerverek érkezési folyamata is Poisson-folyamat, így a D szerver érkezési folyamata PPP(2.5p).

2. feladat

- (c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.

Megoldás.

$$(I - P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & p & 1-p & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

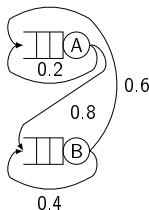
és

$$\sum_{j=1}^4 [(I - P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} =$$
$$0.2857 + \frac{1-p}{4 - 2.5(1-p)} + \frac{p}{2 - 2.5p} + \frac{p}{3 - 2.5p}.$$

- (d) Az előbbi függvény a $p \in [0, 0.8)$ intervallumon a minimumát $p = 0.141$ -nél veszi fel.

3. feladat

Az alábbi zárt hálózatban két igény kering. Az A szerver M/M/1, kiszolgálási rátája $\mu_A = 1.0$, a B szerver szintén M/M/1 típusú, $\mu_B = 2.0$.



- (a) Mik a lehetséges állapotok?
- (b) Írjuk fel a teljes rendszer generátorát, és az alapján számítsuk ki a stacionárius eloszlást.
- (c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást a Gordon-Newell tétel alapján.
- (d) Adjuk meg az egyes szerverek terheltségét.

3. feladat

(a) Mik a lehetséges állapotok?

Megoldás. A lehetséges állapotok:

- ▶ (20): az A szerverben van mindkét igény;
- ▶ (11): az A szerverben és a B szerverben is 1 igény van;
- ▶ (02): a B szerverben van mindkét igény.

(b) A $(20) \rightarrow (11)$ átmenet rátája $1.0 \cdot 0.8$, mivel ilyen átmenet akkor történik, ha az A szerver kiszolgálja a bent lévő két igény közül az elsőt (ennek rátája 1.0), ÉS az a B szerverbe kerül át (ennek valószínűsége 0.8). Hasonlóan a többi átmenetráta:

- ▶ $(20) \rightarrow (11)$ rátája $1.0 \cdot 0.8 = 0.8$;
- ▶ $(11) \rightarrow (20)$ rátája $2.0 \cdot 0.6 = 1.2$;
- ▶ $(11) \rightarrow (02)$ rátája $1.0 \cdot 0.8 = 0.8$;
- ▶ $(20) \rightarrow (11)$ rátája $2.0 \cdot 0.6 = 1.2$.

3. feladat

(b) A teljes rendszer mint Markov-lánc generátora

$$Q = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.8 & 0 \\ 1.2 & -2 & 0.8 \\ 0 & 1.2 & -1.2 \end{bmatrix}$$

az ehhez tartozó stacionárius eloszlás pedig

$$v_{\text{st}} = (0.4737 \ 0.3158 \ 0.2105).$$

3. feladat

(c) Az irányítási mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

és a forgalmi egyenlet:

$$\lambda_A = 0.2\lambda_A + 0.6\lambda_B$$

$$\lambda_B = 0.8\lambda_A + 0.4\lambda_B,$$

ahonnan

$$\lambda_A = 3c, \quad \lambda_B = 4c$$

valamely $c > 0$ konstanssal.

3. feladat

(c) A Gordon–Newell tétel szerint c értékét onnan kapjuk, hogy

$$\sum_{\substack{(k_1, \dots, k_m) : \\ k_1 + \dots + k_m = K}} \prod_{j=1}^m \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j} \right)^{k_j} = 1,$$

ami itt

$$\left(\frac{3c}{1.0} \right)^2 + \left(\frac{3c}{1.0} \right) \left(\frac{4c}{2.0} \right) + \left(\frac{4c}{2.0} \right)^2 = 1,$$

ahonnan $c = 0.2294$, és így

$$\lambda_A = 3c = 0.6882, \quad \lambda_B = 4c = 0.9177.$$

3. feladat

(c) A stacionárius eloszlás a Gordon–Newell tételből számolva

$$v_{\text{st}}(2, 0) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A} \right)^2 = 0.4737,$$

$$v_{\text{st}}(1, 1) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A} \right) \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B} \right) = 0.3158,$$

$$v_{\text{st}}(0, 2) = \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B} \right)^2 = 0.2105,$$

ami valóban megegyezik a generátorból számolt stacionárius eloszlással.

(d) Az egyes szerverek terhelése (kihasználtsága)

$$\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 0.6882 / 1.0 = 0.6882,$$

$$\rho_B = \lambda_B / \mu_B = 0.4588 / 1.0 = 0.4588.$$