

Sztochasztika
5. feladatsor - Koncentrációs tételek
2025. ősz

1. Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor. Jelölje S a dobások összegét. Becsüljük meg CHT alapján annak a valószínűségét, hogy S legalább 370.
 2. Egy szabályos érmét feldobunk 10000-szer. Jelölje S a fejek számát. Olyan y értékre szeretnénk becslést adni, amelyet S 95% eséllyel nem lép át.
 - (a) CHT alapján adjunk becslést y -ra.
 - (b) Berry–Esseen-tétel alapján korlátozzuk a CHT hibáját, majd ez alapján adjunk y -ra alsó és felső becslést.
 - (c) Hoeffding-korlát alapján adjunk felső becslést x -re.
 3. Egy szabályos érmét feldobunk 40000-szer. Annak a valószínűségét szeretnénk megbecsülni, hogy legalább 22000 fejet kapunk.
 - (a) Próbáljuk meg alkalmazni a CHT-t. Mit tapasztalunk?
 - (b) Adjunk felső becslést a valószínűsége a Hoeffding-korlát alapján.
 - (c) Adjunk felső becslést a valószínűsége a Cramer-tétel alapján. (A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramer-féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln \left(\frac{x(1-p)}{(1-x)p} \right) + \ln \left(\frac{1-x}{1-p} \right)$.)
 4. Egy stadionban a mérkőzések szünetében a nézők üdítőt vesznek a büfében. Az egy néző által vásárolt üdítő mennyiségének várható értéke 1/2 liter és szórása is 1/2 liter. Mennyi üdítővel készüljön a büfé a vasárnapi meccsre, ha tudják, hogy 40000 jegyet adtak el, és azt szeretnék, hogy legfeljebb 2% eséllyel ne tudjanak kiszolgálni minden szomszédos nézőt? (Feltesszük, hogy akinek van jegye, az el is jön. A büfében egyféle üdítőt lehet kapni.)
 5. Egy városban 40000 család él. Az egy család által egy nap alatt termelt szemét mennyisége semmiképpen nem több, mint 50 liter; a várható értéke 20 liter, szórása 10 liter.
 - (a) Mekkora napi kapacitású szeméttételező üzemet építsen az önkormányzat a háztartási szemétnak, ha azt szeretnék, hogy annak az esélye, hogy az üzem nem tudja feldolgozni az egy nap alatt termelődött szemetet, legfeljebb 1% legyen? Adjunk becslést a CHT alapján.
 - (b) Miért nem alkalmazható a CHT, ha az önkormányzat 1% helyett 10^{-8} -os biztonságot szeretne? Ebben az esetben adjunk becslést a Hoeffding-korlát segítségével.
 6. Az épülő kelet-szibériai kőolajvezeték mintegy 700 olajkút termelését gyűjti majd össze és szállítja Kína felé. Az olajkútak napi termelése véletlenszerű és független; semelyiké nem kevesebb, mint 490 hordó és nem haladja meg az 1380 hordót, és az átlagos termelésük egy nap összesen 560000 hordó.
 - (a) Mekkora legyen az olajvezeték kapacitása, ha az üzemeltető azt szeretné, hogy a napi termelés legfeljebb 10^{-10} eséllyel legyen nagyobb a kapacitásnál?
 - (b) Adjunk becslést 10^{-10} helyett 10^{-6} és 10^{-8} valószínűségekre is.
 - (c) Mekkora kapacitásnál lesz a túlcsoordulás valószínűsége 0? Mekkora kapacitásnál lesz a túlcsoordulás valószínűsége 1/2? Hasonlítsuk össze a korábbi valószínűségekkel!
 - (d) A kutakról részletesebb információt is kapunk, amiből kiderül, hogy 400 kút termelése mindenképpen 490 hordó és 1040 hordó közé esik, a többi 300 kút termelése pedig mindenképpen 880 hordó és 1380 hordó közé esik. Ez alapján adjunk jobb becslést a szükséges kapacitásra.
- (Megjegyzés: a kőolajvezeték valóban létezik, bár mostanra már megépült, ESPO pipeline néven érdemes rákeresni.)
7. Egy zárthelyin a maximális pontszám 50. A zh-t 100 felkészült és 50 felkészületlen diák írja meg. A felkészült diákok pontszámának várható értéke 40 pont, a felkészületlen diákoké 20 pont (az egyes diákok pontszáma független). Adjunk nagyteltetés-becslést annak a valószínűségére, hogy az összes diák pontszámának átlaga 25 alatt marad.

8. Egy szennyvíztisztító üzem n gyár szennyvizét dolgozza fel. Minden egyes gyár átlagos napi szennyvíztermelése 100 tonna, a maximális napi szennyvíztermelése 200 tonna. A szennyvíztisztító üzem kapacitása C tonna/nap. Egy adott napon *túlsordulás* van, ha a gyárakból származó teljes napi szennyvízmennyiség nagyobb C -nél.
- $n = 100$ and $C = 14000$. Adjunk felső becslést a túlsordulás valószínűségére.
 - $n = 100$. Adjunk felső becslést C értékére úgy, hogy a túlsordulás valószínűsége legfeljebb 10^{-6} legyen.
 - $C = 12000$. Legfeljebb mekkora lehet n úgy, hogy a túlsordulás valószínűsége legfeljebb 10^{-6} legyen?
9. Egy vizsga 5 feladatot tartalmaz, mindegyik feladat 10 pontos. A tanár minden egyes feladatot úgy pontoz, hogy dob egy szabályos hatoldalú dobókockával, és a dobás értéke a feladatra kapott pontszám. A vizsgát 50 diák írja meg.
- Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a diákok átlagos pontszáma legalább 20.
 - Adjunk nagyeltérés-becslést annak a valószínűségére, hogy a diákok átlagos pontszáma legalább 30.
 - Számítsuk ki pontosan annak a valószínűségét, hogy a diákok átlagos pontszáma legalább 30.
10. Egy országban két párt van, A és B. Az A párt támogatottsága 55%, a B párté 45%. Adjunk felső becslést annak a valószínűségére, hogy egy 1000 fős felmérés a B párt támogatottságát hozza ki nagyobbra.
11.
 - Egy szerverhez átlagosan másodpercenként 1 csomag érkezik. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 1 nap alatt legalább 1500 csomag érkezik.
 - Egy szerverhez átlagosan másodpercenként 1 csomag érkezik. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 1 nap alatt legalább 1800 csomag érkezik.
(Segítség: az $\text{EXP}(\mu)$ eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye $I(x) = \mu x - 1 - \ln(\mu x)$, míg a $\text{POI}(\lambda)$ eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda$ ($x > 0$ -ra).)
12. Egy szerverhez átlagosan másodpercenként 1 csomag érkezik. Annak a valószínűségét szeretnénk becsülni, hogy 1 nap alatt legalább 1800 csomag érkezik. Melyik alkalmazható a CHT, Hoeffding-korlát és Cramer-tétel közül? Alkalmazzuk, amelyiket lehet. (A $\text{POI}(\mu)$ eloszlás Cramer-féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln \frac{x}{\mu} - x + \mu$ (ha $x > 0$).)
13. Egy postai teherautó háromféle csomagot szállít:
- egy kis csomag súlya legfeljebb 1 kg, átlagosan 0,4 kg
 - egy közepes csomag súlya legfeljebb 3 kg, átlagosan 1 kg
 - egy nagy csomag súlya legfeljebb 10 kg, átlagosan 4 kg
- A teherautó kapacitása 1200 kg. Már felpakoltunk rá 250 kis csomagot és 200 közepes csomagot. Legfeljebb mennyi nagy csomagot pakolhatunk rá fel, ha azt szeretnénk, hogy a túlterhelés valószínűsége legfeljebb 10^{-4} legyen?
14. Egy zárthelyit 50 diák írt meg. Egy zárthelyi kijavításával a tanár maximum 5 percet, átlagosan 2 percet tölt (függetlenül a többi zh-tól). Adjunk felső becslést annak a valószínűségére, hogy a tanár nem végez 3 óra alatt az összes zárthelyi kijavításával.
15. Egy hibajavító kód 10000 bites sorozatokat dekódol. Ha a 10000-ből legfeljebb 20 bit hibás, akkor a kód még helyesen tudja dekódolni. A csatornán, amit küldünk, minden bit $1/1000$ valószínűséggel megy át hibásan.
- Becsüljük meg CHT alapján annak a valószínűségét, hogy egy 10000-es bitsorozat helyesen dekódolunk.
 - Berry-Esseen-tétel alapján adjunk felső korlátot a becslés hibájára.
16. * Számítsuk ki a $\text{POI}(\mu)$ eloszlás Cramér-féle rátafüggvényét.