Sztochasztika
3. feladatsor - Elágazó folyamatok
2024. ősz

1. Egy nagyon nagy közösségben kezdetben egyetlen ember hordoz egy fertőző betegséget. Mielőtt meggyógyulna, továbbadja a betegséget X_1 másik embernek, ahol X_1 pesszimista geometriai eloszlású p paraméterrel. Miután meggyógyult, nem fertőz tovább. Minden további fertőzött ember a többiektől függetlenül és ugyanilyen eloszlással megfertőz újabb embereket, mielőtt meggyógyul. Modellezzük elágazó folyamattal a történteket, és ennek révén adjunk választ a következő kérdésekre $p = 0,4$ és $p = 0,6$ esetén is.
   (a) Mennyi X_1 várható értéke?
   (b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első emberen kívül senki más nem fertőz tovább (azaz a „második generáció” létszáma 0)?
   (c) Jelölje X_3 a harmadik generáció létszámát. Határozzuk meg $\mathbb{E}(X_3)$ értékét.
   (d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy semelyik generáció sem hal ki? (Ez az esemény felel meg a járvány kialakulásának.)
   (e) Jelölje N az összes megbetegedés számát. Határozzuk meg N várható értékét.

2. Jelölje $\Theta(p)$ a kihalás valószínűségét egy olyan elágazó folyamatnál, melynél az utódeloszlás
$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \ldots$$
   (Ez a pesszimista geometriai eloszlás.)
   Számítsuk ki $\Theta(p)$ értékét tetszőleges $0 < p < 1$ esetén.

3. Legyen egy elágazó folyamat utódeloszlásának generátorfüggvénye G. Fejezzük ki G segítségével a következő események feltételes valószínűségét!
   (a) A folyamat kihal, feltéve, hogy az első generáció létszáma k.
   (b) A folyamat nem hal ki, feltéve, hogy az első generáció nem halt ki.

4. Egy lánclevél arra kéri olvasóját, hogy továbbítsa 12 másik embernek. Aki megkapja, azoknak a 92%-a törli a levelet továbbítás nélkül, 8% azonban továbbítja 12 másik embernek.
   (a) Modellezzük a helyzetet elágazó folyamattal. Mi az utódeloszlás várható értéke? Szubkritikus, kritikus vagy szuperkritikus a folyamat?
   (b) Mekkora a valószínűsége, hogy a levél terjedése előbb-utóbb megáll?
   (c) Feltéve, hogy a levél eredeti szerzője 12 embernek küldte el, mennyi a lánclevél „élettartama” során elküldött levelek számának várható értéke?

5. Dömötör kap egy beadandó feladatot a tanárától, amit 50% eséllyel old meg helyesen. Amennyiben elrontja, kap 2 további feladatot, melyeket szintén 50% eséllyel old meg helyesen (az előzményektől függetlenül). Minden további hibás megoldás „jutalma” is két további feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy Dömötörnek egy idő után nem kell további feladatokat megoldania? Várhatóan hány feladatot kell eddig megoldania összesen?

6. Egy idős hölgy ismer egy pletykát. Elmeséli 0, 1 vagy 2 másik idős hölgynek egyforma eséllyel. Minden egyes hölgy, aki hallja a pletykát, elmeséli véletlen számú további hölgynek, ugyanilyen eloszlással, a többiektől függetlenül. Mennyi az esélye, hogy a pletyka örökké terjed? Számítsuk ki a pletykát megismerő hölgyek számának várható értékét.

7. Egy vírusos számítógép megfertőz véletlen számú további számítógépet PGEO(1/2) eloszlással, mielőtt a vírust hatástalanítják. Kezdetben a vírus csak egyetlen számítógépen van jelen.
   (a) Modellezzük a vírus terjedését elágazó folyamattal. Mik az egyedek? A folyamat szubkritikus, kritikus vagy szuperkritikus?
   (b) Mekkora a valószínűsége, hogy a vírus terjedése előbb-utóbb megáll?
   (c) Várhatóan hány számítógépet fertőz meg a vírus az élettartama alatt?