Sztochasztika

5. feladatsor - Koncentrációs tételek

2024. ősz

1. Egy szabályos dobókockát feldobunk 100-szor. Jelölje S a dobások összegét. Becsüljük meg CHT alapján annak a valószínűségét, hogy S legalább 370.

2. Egy szabályos érmét feldobunk 10000-szer. Jelölje S a fejek számát. Olyan y értékre szeretnénk becslést adni, amelyet S 95% eséllyel nem lép át.

   (a) CHT alapján adjunk becslést y-ra.

   (b) Berry–Esseen-tétel alapján korlátozzuk a CHT hibáját, majd ez alapján adjunk y-ra alsó és felső becslést.

   (c) Hoeffding-korlát alapján adjunk felső becslést x-re.

3. Egy szabályos érmét feldobunk 40000-szer. Annak a valószínűségét szeretnénk megbecsülni, hogy legalább 22000 fejet kapunk.

   (a) Próbáljuk meg alkalmazni a CHT-t. Mit tapasztalunk?

   (b) Adjunk felső becslést a valószínűségre a Hoeffding-korlát alapján.

   (c) Adjunk felső becslést a valószínűségre a Cramer-tétel alapján. (A p paraméterű Bernoulli eloszlás Cramer-féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln\left(\frac{x(1-p)}{(1-x)p}\right) + \ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$.)

4. Egy stadionban a mérkőzések szünetében a nézők üdítőt vesznek a büfében. Az egy néző által vásárolt üdítő mennyiségének várható értéke 1/2 liter és szórása is 1/2 liter. Mennyi üdítővel készüljön a büfé a vasárnapi meccsre, ha tudják, hogy 40000 jegyet adtak el, és azt szeretnék, hogy legfeljebb 2% eséllyel ne tudjanak kiszolgálni minden szomjas nézőt? (Feltesszük, hogy akinek van jegye, az el is jön. A büfében egyféle üdítőt lehet kapni.)

5. Egy városban 40000 család él. Az egy család által egy nap alatt termelt szemét mennyisége semmiképpen nem több, mint 50 liter; a várható értéke 20 liter, szórása 10 liter.

   (a) Mekkora napi kapacitású szemétégető üzemet építsen az önkormányzat a háztartási szemétnek, ha azt szeretnék, hogy annak az esélye, hogy az üzem nem tudja feldolgozni az egy nap alatt termelődött szemetet, legfeljebb 1% legyen? Adjunk becslést a CHT alapján.

   (b) Miért nem alkalmazható a CHT, ha az önkormányzat 1% helyett 10^{-8}-os biztonságot szeretne? Ebben az esetben adjunk becslést a Hoeffding-korlát segítségével.

6. Az épülő kelet-szibériai kőolajvezeték mintegy 700 olajkút termelését gyűjti majd össze és szállítja Kína felé. Az olajkutak napi termelése véletlenszerű és független; semelyiké nem kevesebb, mint 490 hordó és nem haladja meg az 1380 hordót, és az átlagos termelésük egy nap összesen 560000 hordó.

   (a) Mekkora legyen az olajvezeték kapacitása, ha az üzemeltető azt szeretné, hogy a napi termelés legfeljebb 10^{-10} eséllyel legyen nagyobb a kapacitásnál?

   (b) Adjunk becslést 10^{-10} helyett 10^{-6} és 10^{-8} valószínűségre is.

   (c) Mekkora kapacitásnál lesz a túlcsordulás valószínűsége 0? Mekkora kapacitásnál lesz a túlcsordulás valószínűsége 1/2? Hasonlítsuk össze a korábbi valószínűségekkel!

   (d) A kutakról részletesebb információt is kapunk, amiből kiderül, hogy 400 kút termelése mindenképpen 490 hordó és 1040 hordó közé esik, a többi 300 kút termelése pedig mindenképpen 880 hordó és 1380 hordó közé esik. Ez alapján adjunk jobb becslést a szükséges kapacitásra.

   (Megjegyzés: a kőolajvezeték valóban létezik, bár mostanra már megépült, ESPO pipeline néven érdemes rákeresni.)

7. Egy szennyvíztisztító üzem n gyár szennyvizét dolgozza fel. Minden egyes gyár átlagos napi szennyvíztermelése 100 tonna, a maximális napi szennyvíztermelése 200 tonna. A szennyvíztisztító üzem kapacitása C tonna/nap. Egy adott napon *túlcsordulás* van, ha a gyárakból származó teljes napi szennyvízmennyiség nagyobb C-nél.

(a) $n = 100$ and $C = 14000$. Adjunk felső becslést a túlcsordulás valószínűségére.

(b) $n = 100$. Adjunk felső becslést C értékére úgy, hogy a túlcsordulás valószínűsége legfeljebb 10^{-6} legyen.

(c) $C = 12000$. Legfeljebb mekkora lehet n úgy, hogy a túlcsordulás valószínűsége legfeljebb 10^{-6} legyen?

8. Egy vizsga 5 feladatot tartalmaz, mindegyik feladat 10 pontos. A tanár minden egyes feladatot úgy pontoz, hogy dob egyet egy szabályos hatoldalú dobókockával, és a dobás értéke a feladatra kapott pontszám. A vizsgát 50 diák írja meg.

   (a) Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy a diákok átlagos pontszáma legalább 20.

   (b) Adjunk nagyeltérés-becslést annak a valószínűségére, hogy a diákok átlagos pontszáma legalább 30.

   (c) Számítsuk ki pontosan annak a valószínűségét, hogy a diákok átlagos pontszáma legalább 30.

9. Egy országban két párt van, A és B. Az A párt támogatottsága 55%, a B párté 45%. Adjunk felső becslést annak a valószínűségére, hogy egy 1000 fős felmérés a B párt támogatottságát hozza ki nagyobbnak.

10. (a) Egy szerverhez átlagosan másodpercenként 1 csomag érkezik. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 1 nap alatt legalább 1500 csomag érkezik.

    (b) Egy szerverhez átlagosan másodpercenként 1 csomag érkezik. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 1 nap alatt legalább 1800 csomag érkezik.

    (Segítség: az EXP(μ) eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye $I(x) = \mu x - 1 - \ln(\mu x)$, míg a POI($\lambda$) eloszlás Cramér-féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln \frac{x}{\lambda} - x + \lambda$ ($x > 0$-ra).)

11. Egy szerverhez átlagosan másodpercenként 1 csomag érkezik. Annak a valószínűségét szeretnénk becsülni, hogy 1 nap alatt legalább 1800 csomag érkezik. Melyik alkalmazható a CHT, Hoeffding-korlát és Cramer-tétel közül? Alkalmazzuk, amelyiket lehet. (A POI(μ) eloszlás Cramer-féle rátafüggvénye $I(x) = x \ln \frac{x}{\mu} - x + \mu$ (ha $x > 0$).)

12. Egy postai teherautó háromféle csomagot szállít:

    - egy kis csomag súlya legfeljebb 1 kg, átlagosan 0,4 kg
    - egy közepes csomag súlya legfeljebb 3 kg, átlagosan 1 kg
    - egy nagy csomag súlya legfeljebb 10 kg, átlagosan 4 kg

    A teherautó kapacitása 1200 kg. Már felpakoltunk rá 250 kis csomagot és 200 közepes csomagot. Legfeljebb mennyi nagy csomagot pakolhatunk rá fel, ha azt szeretnénk, hogy a túlterhelés valószínűsége legfeljebb 10^{-4} legyen?

13. Egy zárthelyin a maximális pontszám 50. A zh-t 100 felkészült és 50 felkészületlen diák írja meg. A felkészült diákok pontszámának várható értéke 40 pont, a felkészületlen diákoké 20 pont (az egyes diákok pontszáma független). Adjunk nagyeltérés-becslést annak a valószínűségére, hogy az összes diák pontszámának átlaga 25 alatt marad.

14. Egy zárthelyit 50 diák írt meg. Egy zárthelyi kijavításával a tanár maximum 5 percet, átlagosan 2 percet tölt (függetlenül a többi zh-tól). Adjunk felső becslést annak a valószínűségére, hogy a tanár nem végez 3 óra alatt az összes zárthelyi kijavításával.

15. Egy hibajavító kód 10000 bites sorozatokat dekódol. Ha a 10000-ből legfeljebb 20 bit hibás, akkor a kód még helyesen tudja dekódolni. A csatornán, amit küldünk, minden bit 1/1000 valószínűséggel megy át hibásan.

    (a) Becsüljük meg CHT alapján annak a valószínűségét, hogy egy 10000-es bitsorozatot helyesen dekódolunk.

    (b) Berry–Esseen-tétel alapján adjunk felső korlátot a becslés hibájára.

16. * Számítsuk ki a POI(μ) eloszlás Cramér-féle rátafüggvényét.