Sztochasztika

7. feladatsor - Folytonos idejű Markov-láncok

2024. ősz

1. Egy gép Exp(0,1) ideig működik (órában mérve), majd elromlik. Ha elromlott, azonnal elkezdik javítani; a javítás Exp(0,9) ideig tart (órában), és független a működési időszak hosszától.

   (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel az infinitezimális generátort.

   (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú idő alatt a teljes idő mekkora része telik javítással?

   (c) Amíg a gép működik, óránként 14000 forint bevételt termel. A szerelő óradíja 7000 forint. Mekkora átlagos „nettó” bevételt termel óránként a gép hosszú távon?

   (d) Adjuk meg a beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc átmenet-valószínűség mátrixát.

2. Egy bankfiókban két ablaknál szolgálják ki az ügyfeleket. Az ügyféltérben egyszerre legfeljebb 5 ügyfél tartózkodhat (beleértve az éppen kiszolgálás alatt lévőket is). Amikor az ügyféltér tele van, a biztonsági őr automatikusan elküldi a további ügyfeleket. A bankfiókba átlagosan 5 percenként érkezik egy ügyfél. Egy ügyfél kiszolgálása átlagosan 8 percet vesz igénybe. Ha egy ügyfelet kiszolgálnak, a sorban következő azonnal beáll a felszabaduló ablakhoz. Ha mindkét ablak szabad, amikor egy ügyfél érkezik, akkor találomra áll be valamelyikhez.

   (a) Modellezzük a rendszert folytonos idejű Markov lánccal. Írjuk fel $X(t)$ generátorát.

   (b) Határozzuk meg $(X(t), t \geq 0)$ stacionárius eloszlását.

   (c) Mekkora a valószínűsége, hogy egy véletlen időpontban a fiókban 3 ügyfél tartózkodik?

   (d) Hosszú távon átlagosan hány ügyfél tartózkodik a fiókban egyszerre?

   (e) Az ügyfelek mekkora részét küldik el amiatt, hogy az ügyféltér tele van?

   (f) Átlagosan mennyi időt tölt egy ügyfél a bankfiókban?

   (g) Az idő mekkora részét tölti tétlenül az *első* ablaknál dolgozó ügyintéző?

3. Egy ügyvédi irodában 3 ügyvéd dolgozik. Mindegyik ügyvéd egyszerre legfeljebb 1 ügyön dolgozik (és minden elvállalt ügyön csak 1 ügyvéd dolgozik). Az irodába átlagosan havonta 1 felkérés érkezik Poisson-folyamat szerint; csak akkor vállalnak el egy ügyet, ha éppen szabad valamelyik ügyvéd (ha több is szabad, akkor sorsolással döntik el, kié az ügy). Egy ügy átlagosan 3 hónapig tart.

   (a) Jelölje X_t a foglalt ügyvédek számát a t időpontban. Mit kell még feltenni a megadott információkon kívül, hogy X_t folytonos idejű Markov-lánc legyen? Adjuk meg az állapotokat és a generátort.

   (b) Most éppen mindhárom ügyvéd foglalt. Mekkora az esélye, hogy 3 nap múlva már csak két ügyvéd lesz foglalt (a 3 napot tekinthetjük 1/10 hónapnak).

   (c) Hosszú távon átlagosan hányan dolgoznak egyszerre?

4. Tivadar szabadúszó programozó. Kétféle munkát vállal, melyek hossza véletlenszerűen változik. Az A típusú munka átlagosan 1 hónapig tart, a B típusú munka átlagosan 2 hónapig tart. Amikor Tivadar egy munkája véget ér, akkor átlagosan 2/3 hónap telik el, míg érkezik megrendelés A típusú munkára, illetve átlagosan 1 hónap telik el, amíg érkezik megrendelés B típusúra. Azt vállalja el, amelyik előbb jön.

   (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

   (b) Tivadarnak most éppen nincs munkája. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap A típusú munkára ajánlatot? Mennyi a valószínűsége, hogy 2 nap múlva A típusú munkán fog dolgozni? Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap bármilyen típusú munkára ajánlatot?

   (c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú távon az idő mekkora részét tölti Tivadar A típusú munkával?

   (d) Tivadar napidíja (ezer forintban) A típusú munka esetén 20, B típusú munka esetén 50. Számítsuk ki, átlagosan mennyi a napi keresete hosszú távon.

   (e) Írjuk fel a beágyazott Markov-lánc átmenet-mátrixát.

   (f) Hosszú távon az elvállalt munkák hányadrésze A típusú?

   (g) Tegyük fel, hogy a B típusú munka két egymást követő részből áll, melyek hossza független és külön-külön exponenciális eloszlású 1 várható értékkel (továbbá az A típusú munka hossza exponenciális eloszlású és a tétlen időszak hossza is exponenciális eloszlású). Írjuk fel az ennek megfelelő Markov-láncot, és számítsuk ki a stacionárius eloszlást ebben az esetben is. Vessük össze az eredeti ML stacionárius eloszlásával. Próbáljuk szóban megfogalmazni a két folyamat közti különbséget.

   (h) Tivadar úgy dönt, hogy A típusú munkát nem vállal többé. Számítsuk ki, átlagosan mennyi lesz így a napi keresete hosszú távon.

5. $X(t)$ és $Y(t)$ párhuzamosan, egymástól függetlenül zajló folytonos idejű Markov-láncok. $X(t)$ állapottere $\{a, b, c\}$, $Y(t)$ állapottere $\{1, 2\}$; a generátoraik:

$$G_X = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad\qquad G_Y = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Legyen $Z(t) = (X(t), Y(t))$. Gondoljuk meg, hogy $Z(t)$ is folytonos idejű Markov-lánc. Adjuk meg az állapotokat. Számítsuk ki a stacionárius eloszlást is. Mi a kapcsolat $Z(t)$ stacionárius eloszlása, valamint $X(t)$ és $Y(t)$ stacionárius eloszlása között?

6. Egy távközlési kábelen három független adatfolyam megy. Az adatfolyamok egyformák; egy adatfolyamnak két állapota van: ON állapotban 1 Mb/s a sebessége, OFF állapotban 0 Mb/s. ON állapotból μ rátával lép át OFF állapotba és OFF állapotból λ rátával lép át ON állapotba. Az adatfolyamok egymástól függetlenek. Jelölje X_t azt, hogy a t időpontban mennyi a három adatfolyam együttes sebessége. Gondoljuk meg, hogy X_t-re teljesül a Markov-tulajdonság, majd írjuk fel a generátorát.

7. Egy betörő átlagosan havi 2 betörést követ el, kivéve, amikor börtönben van. Minden egyes betörésért 1/4 eséllyel kapják el. Ha elkapják, börtönbe küldik. A börtönből átlagosan 4 hónap után szabadul és újból nekilát a betöréseknek.

   (a) Modellezzük a betörő állapotát folytonos idejű Markov-lánccal. Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

   (b) Feltéve, hogy most éppen szabadlábon van, mekkora a valószínűsége, hogy 10 nap múlva is szabadlábon lesz? (1 hónap tekinthető 30 napnak.)

   (c) Mennyi a valószínűsége, hogy jövőre ilyenkor szabadlábon lesz?

   (d) 10 év alatt az idő mekkora részét tölti börtönben?

   (e) Az okozott kár betörésenként átlagosan 100000 forint. Hosszú távon havonta átlagosan mekkora kárt okoz a betörő?

8. A Faláb FC focicsapatának 5 csatára van összesen. A csatárok közül esetleg néhány sérült. A csapat mindig 3 egészséges csatárral játszik (ha ennél kevesebb csatáruk egészséges, akkor az összes egészséges csatár játszik). Ha egy csatár játszik, akkor átlagosan 3 havonta sérül le. Egy sérülés átlagosan 1 hónapig tart. Ha egy csatár nem játszik, nem sérül meg.

   Jelölje a sérült csatárok számát a t időpontban X_t.

   (a) Modellezzük X_t-t folytonos idejű Markov-lánccal! Mennyiben „modell” a Markov-lánc, azaz milyen feltételezéseket teszünk és azok mennyire jogosak?

   (b) Írjuk fel a generátort. Figyeljünk az átmenet rátákra!

   (c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást.

   (d) Az idő mekkora részében kénytelen a csapat csatár nélkül játszani?

   (e) Átlagosan hány csatárral játszanak?

   (f) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy 3 nap múlva is minden csatár egészséges (a 10 napot tekinthetjük 1/10 hónapnak).

   (g) Tegyük fel, hogy éppen minden csatár egészséges. Becsüljük meg annak a valószínűségét, hogy ez a következő 3 napban végig így marad. Figyeljünk a megfogalmazásra!

9. Egy sötét folyosót egyetlen lámpa világít meg, melyet a folyosóra belépéskor lehet felkapcsolni. Amikor valaki belép a folyosóra és a lámpa nem ég, felkapcsolja. A lámpa magától kapcsol ki pontosan 1 perc után; amíg világít, addig a kapcsoló újbóli megnyomása nem csinál semmit. Az emberek Poisson folyamat szerint érkeznek a folyosóra, átlagosan 4 percenként. Jelölje X_t a lámpa állapotát t-kor.

   (a) Mik a lehetséges állapotok? Teljesül-e X_t-re a Markov-tulajdonság?

   (b) Az idő mekkora részében világít a lámpa?

   (c) Egy éppen érkező ember mekkora eséllyel találja a lámpát felkapcsolva?

   (d) Tegyük fel, hogy egy embernek 20 másodpercig tart átkelni a folyosón. Feltéve, hogy felkapcsolva találta a lámpát, amikor belépett, mekkora az esélye, hogy végigér a folyosón égő lámpa mellett?