9. feladatsor
Statisztika I - paraméterbecslés
2024. ősz

1. Egy pénzérme nem szabályos, p valószínűséggel a fej lesz felül ($0 < p < 1$), de p értéke ismeretlen.
   (a) A FIFFFIFFIF sorozatot kapjuk. Ez alapján adjunk maximum-likelihood-becslést p-re. Adjunk momentum-becslést is p-re.
   (b) Feldobjuk az érmét 10-szer, és azt tapasztaljuk, hogy a fejek száma 7 lett. Ez alapján adjunk maximum-likelihood-becslést p-re. Adjunk momentum-becslést is p-re.
   (c) Feljegyezzük, hogy két szomszédos fej között mennyi írást dobtunk; a következőket kaptuk: 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1. Ez alapján is adjunk maximum-likelihood-becslést és momentum-becslést p-re.
2. Egy úton az autók λ paraméterű Poisson-pontfolyamat szerint érkeznek, λ azonban ismeretlen. Tíz különböző egy perces intervallumban megszámoltuk az érkező autókat, és a következőket kaptuk: 0, 1, 2, 0, 3, 0, 0, 1, 0, 1. Adjunk ML-becslést λ értékére a minta alapján. Adjunk maximum likelihood-becslést is λ értékére.
3. Egy tóban N hal van, N azonban ismeretlen. Úgy próbáljuk N-et megbecsülni, hogy kifogunk 50 halat, megjelöljük, majd visszaengedjük őket. Valamivel később ismét kifogunk 40 halat, és azt tapasztaljuk, hogy közülük 4 jelölt. Ez alapján adjunk maximum likelihood becslést N értékére. Adjunk momentum-becslést is N értékére.
4. A családok jövedelmét egy olyan skálán mérjük, ahol $X = 1$ a létminimumnak felel meg. Feltételezzük, hogy a jövedelem eloszlása az $f(x) = \frac{\theta}{x^{\theta+1}}$ ($x \geq 1$) sűrűségfüggvénnyel adható meg. (Ez az úgynevezett Pareto-eloszlás). Adjunk maximum likelihood becslést a θ-ra 10 véletlenszerűen választott család jövedelme alapján: $1.53, 2.76, 19.65, 4.16, 7.31, 1.21, 254.2, 5.45, 1.12, 1.63$.
5. Egy M/M/1 szerver terheltségét ($\rho = \lambda/\mu$, ahol λ az érkezési, μ a kiszolgálási ráta) a bufferben sorban álló igények számából akarjuk megbecsülni. Tudjuk, hogy ha a terheltség ρ ($0 < \rho < 1$), akkor a bufferben lévő igények száma PGEO$(1 - \rho)$ eloszlású (beleértve az éppen kiszolgálás alatt álló igényt is). 5 távoli időpontban ránézve a szerverre, a bufferben lévő igények számára a következő adódott: 2, 0, 4, 1, 1. Adjunk ML-becslést ρ értékére a minta alapján. Adjunk momentum-becslést is ρ értékére. (Miért fontos, hogy távoli időpontok legyenek?)
6. Az $X_1, \ldots, X_n$ minta az $U[0, a]$ háttéreloszlásból származik.
   (a) Adjunk momentum-becslést a értékére a $0.38, 0.78, 2.22, 1.91, 1.71$ minta alapján.
   (b) Adjunk maximum-likelihood becslést a értékére a $0.38, 0.78, 2.22, 1.91, 1.71$ minta alapján.
   (c) Adjunk momentum-becslést a értékére a $0.38, 0.20, 2.22, 0.16, 0.24$ minta alapján. Mit tapasztalunk?
7. Egy vizsgán a hallgatóknak átlagosan 60%-a megy át. Az előző félévben 14 hallgató ment át a vizsgán N-ből, N azonban ismeretlen. Adjunk ML-becslést N-re. Adjunk momentum-becslést N-re.
8. Egy alkatrész élettartama exponenciális eloszlású θ/t várható értékkel, ha t hőmérsékleten működtetjük. Tegyük fel, hogy az n megfigyelést a különböző $t_1, \ldots, t_n$ hőmérsékleten végeztük és $x_1, \ldots, x_n$ élettartamokat figyeltünk meg. Adjunk maximum likelihood becslést θ-ra.
9. * Egy diszkrét idejű Markov láncnak két állapota van: 1 and 2. A P átmenetmátrix ismeretlen, a kezdeti vektor $(1, 0)$. A következő minta alapján adjunk ML becslést P-re.

   $$1, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 2, 2, 1, 2, 2, 1, 2, 1, 1, 2, 2, 1, 2$$

   Hasonlítsuk össze a $\hat{P}$ ML-becslés stacionárius eloszlását az 1 és 2 relatív gyakoriságával a fenti sorozatban. Magyarázzuk meg a különbséget.