

Elágazó folyamatok

Sztochasztika

Horváth Illés

2024/10/29

Kezdetben egyetlen egyed van.

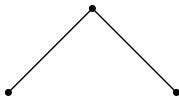
Neki van véletlen számú *utóda*.

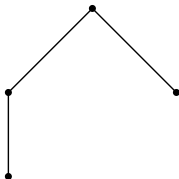
Minden utódjának szintén van véletlen számú utóda, ugyanolyan eloszlással, függetlenül a többiektől.

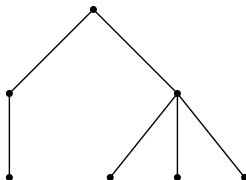
Az ő utódaiknak is van véletlen számú utóda ugyanolyan eloszlással függetlenül a többiektől, és így tovább.

Az így kapott folyamat egy *elágazó folyamat* vagy *Galton-Watson fa*.

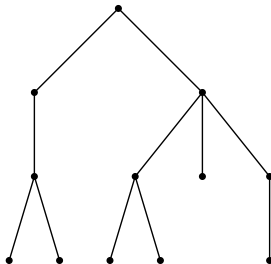
•



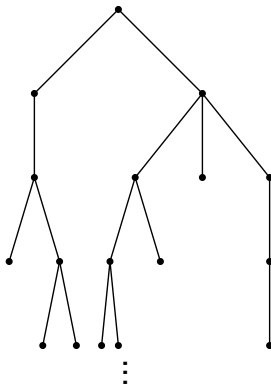


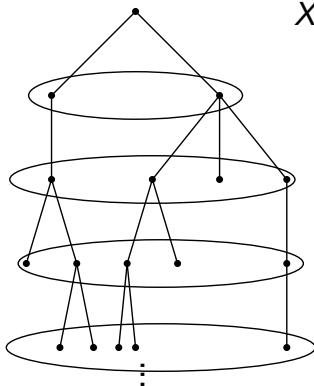


Példa



Példa





$X_0 = 1$ (0. generáció)

X_1 (1. generáció)

X_2 (2. generáció)

X_3 (3. generáció)

$\vdots$

Galton és Watson eredetileg a nemesi nevek leszármazását vizsgálták Angliában.

További példák:

- járványterjedés
- információ terjedése
- nukleáris láncreakció

Kérdések:

- A folyamat kihal vagy örökké folytatódik?
- Mi X_n (az n -edik generáció) eloszlása? $\mathbb{E}(X_n) = ?$
- Mi $N = \sum_{n=0}^{\infty} X_n$, a folyamat teljes egyedszámának az eloszlása?

Generátorfüggvény segítségével válaszoljuk meg a fenti kérdéseket.

X_1 eloszlását *utóeloszlásnak* nevezzük; a generátorfüggvényét jelölje $G(z)$. $G(z)$ teljesen leírja az elágazó folyamat viselkedését; $G(z)$ a folyamat egyetlen bemenete, ismeretében a fenti kérdéseket mind meg tudjuk válaszolni.

$X_0 = 1$, mivel kezdetben 1 egyed van a folyamatban.

X_1 véletlen, generátorfüggvénye $G(z)$.

X_2 egy X_1 tagszámú összeg, így a generátorfüggvénye $G(G(z))$.

Hasonlóan X_3 generátorfüggvénye $G(G(G(z)))$, és így tovább.

Általában X_n generátorfüggvénye $\underbrace{G(\dots G(z) \dots)}_n$.

X_n várható értéke

Lemma

$$\mathbb{E}(X_n) = (\mathbb{E}(X_1))^n = (G'(1))^n.$$

Biz. X_n generátorfüggvénye $G(\dots G(z) \dots)$, ahol G n -szer szerepel. Ennek a deriváltját kell kiszámítanunk a $z = 1$ helyen:

$$\begin{aligned} \underbrace{G(\dots G(z) \dots)}_n' \Big|_{z=1} &= \\ &= G'(\underbrace{G(\dots G(z) \dots)}_{n-1}) \Big|_{z=1} \cdot G'(\underbrace{G(\dots G(z) \dots)}_{n-2}) \Big|_{z=1} \cdots G'(z) \Big|_{z=1} = \\ &\stackrel{G(1)=1}{=} G'(1) \cdot G'(1) \cdots G'(1) = (G'(1))^n. \end{aligned}$$

A folyamat viselkedése nagyban függ $G'(1)$ értékétől.

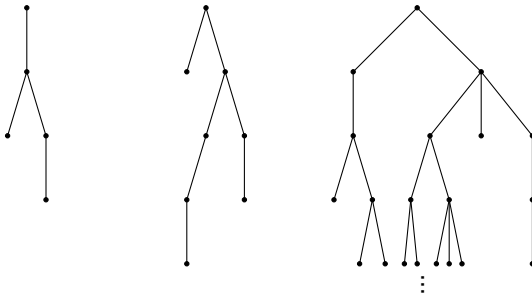
Hogyan viselkedik $\mathbb{E}(X_n) = (G'(1))^n$ amint $n \rightarrow \infty$?

- Ha $G'(1) < 1$, minden egyednek átlagosan *kevesebb, mint 1* utóda van, azaz a generációk átlagban egyre kisebbek, és $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow 0$ exponenciálisan gyorsan.
- Ha $G'(1) = 1$, minden egyednek átlagosan *1* utóda van, és $\mathbb{E}(X_n) = 1$.
- Ha $G'(1) > 1$, minden egyednek átlagosan *több, mint 1* utóda van, és a generációk átlagosan egyre nagyobbak lesznek, és $\mathbb{E}(X_n) \rightarrow \infty$ exponenciálisan gyorsan.

Osztályozás

Ez alapján természetes az elágazó folyamatokat 3 osztályra osztani $G'(1)$ értéke alapján:

- Ha $G'(1) < 1$, a folyamat *szubkritikus*.
- Ha $G'(1) = 1$, a folyamat *kritikus*.
- Ha $G'(1) > 1$, a folyamat *szuperkritikus*.



A kihalás az az esemény, hogy egy idő után semelyik egyednek nincs több utóda.

Tétel

$$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*,$$

ahol z^* a legkisebb nemnegatív megoldása a

$$G(z) = z$$

egyenletnek.

Kihalás valószínűsége

Biz. $X_n = 0$ az az esemény, hogy a folyamat kihal az n -edik generációban vagy korábban, a kihalás pedig az az esemény, hogy *valamelyik* generáció üres, azaz

$$\{\text{kihalás}\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = 0\}.$$

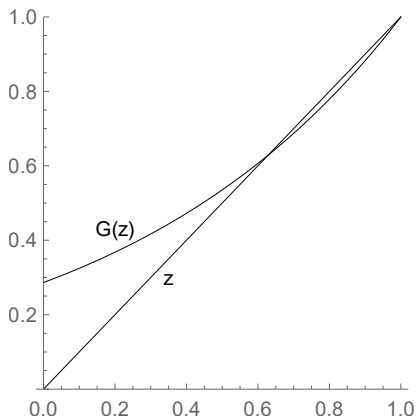
Mivel X_n generátorfüggvénye $\underbrace{G(\dots G(z) \dots)}_n$, és $\mathbb{P}(X_n = 0)$

növekvő, ezért

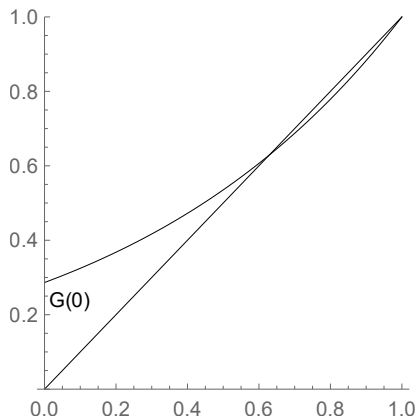
$$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{G(\dots G(0) \dots)}_n.$$

Ezt a limeszt kell kiszámítanunk.

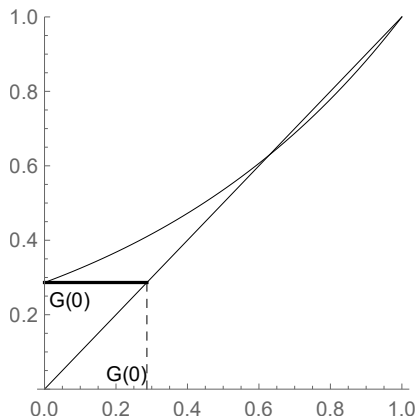
Kihalás valószínűsége



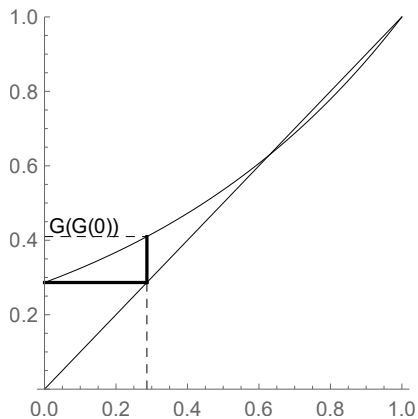
Kihalás valószínűsége



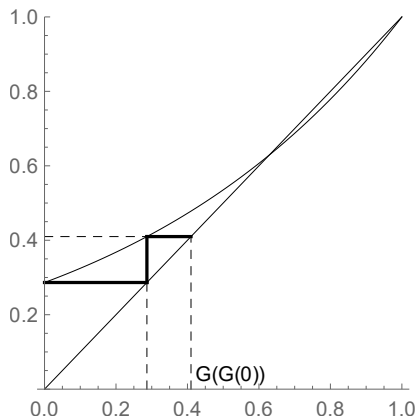
Kihalás valószínűsége



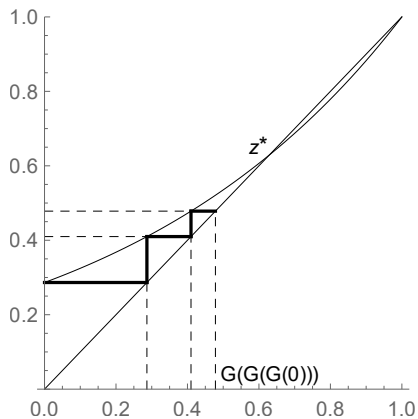
Kihalás valószínűsége



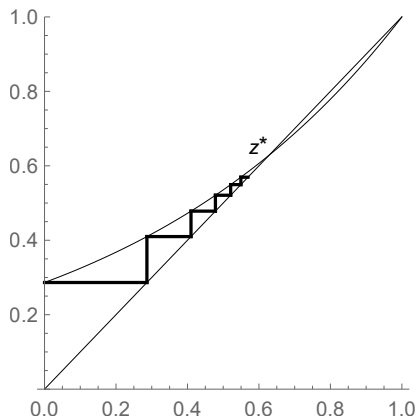
Kihalás valószínűsége



Kihalás valószínűsége



Kihalás valószínűsége



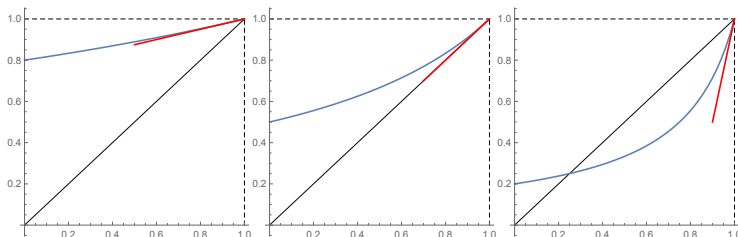
Tétel

- (a) Szubkritikus folyamatra $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1$.
- (b) Kritikus folyamatra $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1$, kivéve azt a determinisztikus folyamatot, amelyre $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$.
- (c) Szuperkritikus folyamatra $\mathbb{P}(\text{kihalás}) < 1$.

Biz. Az előző tétel szerint $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, ahol z^* a $G(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.

Mivel $G(1) = 1$, ezért $z = 1$ mindig gyöke $G(z) = z$ -nek. Mivel $G(z)$ konvex $[0, 1]$ -en, ezért $[0, 1]$ -en legfeljebb két metszéspontja lehet a z egyenessel; a kérdés az, van-e az 1-en kívül még egy másik is.

Kihalás valószínűsége



$$G'(1) < 1$$

$$G'(1) = 1$$

$$G'(1) > 1$$

$G'(1) > 1$ esetén $G(z)$ grafikonja az 1 közelében a z függvény alatt van, viszont 0 közelében már felette, tehát valahol 0 és 1 között metszik egymást.

$G'(1) \leq 1$ esetén $G(z)$ grafikonja végig a z függvény felett halad, tehát nincs másik gyök 0 és 1 között.

A kihalás valószínűségét összefoglalva:

- Ha a folyamat szubkritikus vagy kritikus (kivéve a determinisztikus $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$ folyamatot), akkor $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^* = 1$ automatikusan teljesül.
- Ha a folyamat superkritikus, akkor z^* -ot a $G(z) = z$ egyenletből kell kiszámolnunk.

Példa. Ottónak 0, 1, 2 vagy 3 gyermeke születik, mindegyik $1/4$ valószínűséggel. Minden leszármazottjának ugyanilyen eloszlású a gyermekeinek száma, függetlenül a többiektől.

$$\mathbb{P}(\text{Ottónak nincs gyereke}) = ?$$

$$\mathbb{P}(\text{Ottónak nincs unokája}) = ?$$

$$\mathbb{P}(\text{Ottónak nincs dédunokája}) = ?$$

$$\mathbb{P}(\text{Ottónak leszármazottai előbb-utóbb kihalnak}) = ?$$

Az utódeloszlás generátorfüggvénye

$$G(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^3.$$

Innen

$$\mathbb{P}(\text{Ottónak nincs gyereke}) = \mathbb{P}(X_1 = 0) = G(0) = \frac{1}{4} = 0.25,$$

$$\mathbb{P}(\text{Ottónak nincs unokája}) = \mathbb{P}(X_2 = 0) =$$

$$G(G(0)) = G\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{85}{256} \approx 0.332,$$

$$\mathbb{P}(\text{Ottónak nincs dédunokája}) = \mathbb{P}(X_3 = 0) =$$

$$G(G(G(0))) = G\left(\frac{85}{256}\right) \approx 0.370.$$

$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, ahol z^* a $G(z) = z$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.

$G'(1) = \frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2} > 1$, a folyamat szuperkritikus, tehát $z^* < 1$ és meg kell oldanunk a $G(z) = z$ egyenletet.

$$G(z) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^3 = z,$$

ahonnan $z^3 + z^2 - 3z + 1 = 0$. Ez ugyan egy harmadfokú egyenlet, de $z = 1$ mindig megoldása $G(z) = z$ -nek, tehát $(z - 1)$ kiemelhető:

$$z^3 + z^2 - 3z + 1 = (z - 1)(z^2 + 2z - 1),$$

aminek a gyökei $z_1 = 1$, $z_2 = -1 - \sqrt{2} \approx -2.414$ és $z_3 = z^* = -1 + \sqrt{2} \approx 0.414$.

Tétel

(a) *Szubkritikus elágazó folyamatra*

$$\mathbb{P}(X_n \geq 1) \rightarrow 0$$

exponenciálisan gyorsan, amint $n \rightarrow \infty$.

(b) *Szuperkritikus elágazó folyamatra*

$$\mathbb{P}(X_n \geq 1) \rightarrow 1 - \mathbb{P}(\text{kihalás})$$

exponenciálisan gyorsan, amint $n \rightarrow \infty$.

(c) *Kritikus elágazó folyamatra (kivéve a determinisztikus $\mathbb{P}(X_1 = 1) = 1$ folyamatot)*

$$\mathbb{P}(X_n \geq 1) = O(1/n)$$

Túlélés valószínűsége

$$(a) \mathbb{P}(X_n \geq 1) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = k) \leq \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}(X_n = k) = \mathbb{E}(X_n) = (G'(1))^n.$$

(b) A $[0, z^*]$ intervallumon

$$|G'(z)| \leq |G'(z^*)| = c < 1,$$

így Lagrange-középértéktétel miatt tetszőleges $z \in [0, z^*]$ -ra

$$|G(z) - z^*| = |G(z) - G(z^*)| \leq c|z - z^*|,$$

tehát speciálisan $z = 0$ -ra

$$|\underbrace{G(\dots G(0) \dots)}_n - z^*| \leq c^n |0 - z^*| \leq c^n.$$

(c) nem biz.

Populáció teljes mérete

Jelölje $N = \sum_{n=0}^{\infty} X_n$ a populáció teljes méretét (ha az elágazó folyamat nem hal ki, akkor $N = \infty$). N generátorfüggvényét jelölje $G_N(z)$ (szuperkritikus folyamatra G_N hiányos generátorfüggvény).

Tétel

(a)

$$\mathbb{E}(N) = \begin{cases} \frac{1}{1-G'(1)} & \text{ha } G'(1) < 1 \\ \infty & \text{ha } G'(1) \geq 1 \end{cases}$$

(b)

$$G_N(z) = zG(G_N(z)).$$

Biz.

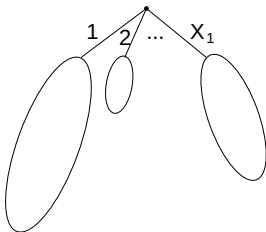
(a)

$$\mathbb{E}(N) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}(X_n) = \sum_{n=0}^{\infty} (G'(1))^n.$$

(b)

$$N = 1 + N_1 + \dots + N_{X_1},$$

ahol X_1 az első generáció létszáma, és $N_1, \dots, N_{X_1}$ az első generáció egyedeihez tartozó részfolyamatok mérete. Az N_i -k függetlenek és eloszlásuk megegyezik N eloszlásával, tehát a jobboldalon szereplő véletlen tagszámú összeg generátorfüggvénye $zG(G_N(z))$, a baloldal generátorfüggvénye pedig $G_N(z)$.



Populáció teljes mérete

Megjegyzések. A

$$G_N(z) = zG(G_N(z))$$

egyenlet megoldható külön-külön minden z -re.

A tétel nem állítja, hogy $G_N(z)$ az egyetlen megoldás, csak azt, hogy a keresett $G_N(z)$ a megoldások egyike.

$$G_N(1) = z^* = \mathbb{P}(\text{kihalás}).$$

Ha $G'(1) < 1$, akkor

$$G'_N(1) = \mathbb{E}(N) = \frac{1}{1 - G'(1)},$$

míg ha $G'(1) > 1$, akkor

$$G'_N(1) = \mathbb{E}(N|N < \infty).$$

Példa. Ha $X_1 \sim PGEO(1/3)$, akkor

$$G(z) = \frac{1}{3-2z},$$

és $G_N(z) = zG(G_N(z))$ egy másodfokú egyenletre vezet, amelynek megoldásai

$$\frac{3 \pm \sqrt{9-8z}}{4}.$$

A két megoldás közül az a valódi, amelyikre $G_N(0) = 0$ teljesül. Ebben az esetben ez a $(-)$ -os, tehát

$$G_N(z) = \frac{3 - \sqrt{9-8z}}{4}.$$

Tétel (Elágazó folyamat dualitása)

Tekintsünk egy szuperkritikus elágazó folyamatot, melynek utódeloszlása

$$\mathbb{P}(X_1 = k) = p_k, \quad k = 0, 1, \dots$$

Legyen a kihalás valószínűsége $z^ < 1$. Ezen folyamat feltételes eloszlása azon feltétel mellett, hogy a folyamat kihál, megegyezik egy olyan elágazó folyamat eloszlásával, melynek utódeloszlása*

$$\mathbb{P}(X'_1 = k) = (z^*)^{k-1} p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

(A teljes folyamat eloszlásáról van szó, azaz arról a valószínűségi mértékről, amely megmondja, hogy a teljes folyamat mekkora valószínűséggel vesz fel adott véges vagy végtelen fákát.)

Nem biz.

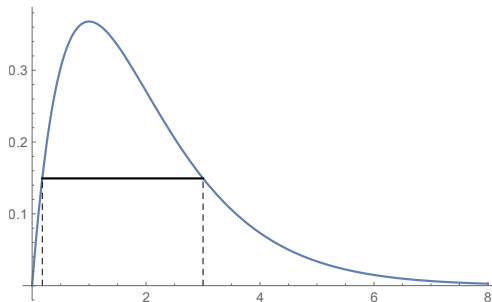
Speciális eset: Poisson elágazó folyamat dualitása.

Ha az eredeti szubkritikus folyamat utódeloszlása $\text{POI}(\mu)$, ahol $\mu > 1$, akkor, feltéve, hogy a folyamat kihal, ezen folyamat feltételes eloszlása megegyezik egy olyan elágazó folyamat eloszlásával, melynek utódeloszlása $\text{POI}(\lambda)$, ahol λ a

$$\lambda e^{-\lambda} = \mu e^{-\mu}$$

egyenlet azon megoldása, amelyre $\lambda < 1$.

Poisson elágazó folyamat dualitása



A $\lambda e^{-\lambda}$ függvény grafikonja. Érdekes módon minél nagyobb μ , annál kisebb λ .

Egy lehetséges interpretáció, hogy egy erősen szuperkritikus elágazó folyamat csak úgy tud kihalni, ha ez nagyon hamar bekövetkezik, és olyankor egy erősen szubkritikus elágazó folyamatra hasonlít.

	szubkritikus	kritikus	szuperkritikus
$\mathbb{E}(X_n)$	$(G'(1))^n$		
$\mathbb{P}(X_n = 0)$	$\underbrace{G(\dots G(0) \dots)}_n$		
$\mathbb{P}(\text{kihalás})$	1	1	$z^* < 1$
$\mathbb{E}(N)$	$\frac{1}{1-G'(1)}$	∞	∞

z^* a $z = G(z)$ egyenlet legkisebb nemnegatív gyöke.

Véges populáció

Az elágazó folyamat egy olyan modell, amelynek potenciálisan végtelen a mérete. Véges populáción zajló folyamatok modellezésénél (pl. járványterjedés) emiatt mindenképpen csak közelítés. A közelítés annál pontosabb, minél kisebb a folyamat mérete a teljes populációhoz képest.

Véges populáció esetén az, hogy az elágazó folyamat végtelen, annak felel meg, hogy a folyamat egyedszáma összemérhető a teljes populációval. A kihalás pedig annak felel meg, hogy a folyamat mérete sokkal kisebb, mint a teljes populáció mérete.

Ajánlott irodalom: Janson–Luczak–Rucinski: Random Graphs.

1. feladat

Egy nagyon nagy közösségben kezdetben egyetlen ember hordoz egy fertőző betegséget. Mielőtt meggyógyulna, továbbadja a betegséget X_1 másik embernek, ahol X_1 pesszimista geometriai eloszlású p paraméterrel. Miután meggyógyult, nem fertőz tovább. Minden további fertőzött ember a többiektől függetlenül és ugyanilyen eloszlással megfertőz újabb embereket, mielőtt meggyógyul. Modellezzük elágazó folyamattal a történeteket, és ennek révén adjunk választ a következő kérdésekre $p = 0,4$ és $p = 0,6$ esetén is.

1. feladat

- (a) Mennyi X_1 várható értéke?
- (b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első emberen kívül senki más nem fertőz tovább (azaz a „második generáció” létszáma 0)?
- (c) Jelölje X_3 a harmadik generáció létszámát. Határozzuk meg $\mathbb{E}(X_3)$ értékét.
- (d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy semelyik generáció sem hal ki? (Ez az esemény felel meg a járvány kialakulásának.)
- (e) Jelölje N az összes megbetegedés számát. Határozzuk meg N várható értékét.

1. feladat

Megoldás. Jelölje $G(z)$ az utódeloszlás generátorfüggvényét:

$$G(z) = \frac{p}{1 - (1 - p)z}.$$

(a)

$$\mathbb{E}(X_1) = G'(1) = \frac{1 - p}{p}.$$

$p = 0.4$ esetén $\mathbb{E}(X_1) = 3/2 = 1.5 > 1$, azaz a folyamat szuperkritikus.

$p = 0.6$ esetén, $\mathbb{E}(X_1) = 2/3 \approx 0.667 < 1$, azaz a folyamat szubkritikus.

1. feladat

(b)

$$\mathbb{P}(X_2 = 0) = G(G(0)) = G(p) = \frac{p}{1 - (1 - p)p}.$$

$$p = 0.4\text{-re } \mathbb{P}(X_2 = 0) \approx 0.526.$$

$$p = 0.6\text{-re } \mathbb{P}(X_2 = 0) \approx 0.789.$$

(c)

$$\mathbb{E}(X_3) = (G'(1))^3 = \left(\frac{1-p}{p}\right)^3.$$

$$p = 0.4\text{-re } \mathbb{E}(X_3) = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = 3.375.$$

$$p = 0.6\text{-re } \mathbb{E}(X_3) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0.296.$$

1. feladat

(d) $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^*$, a legkisebb nemnegatív gyöke a

$$z = G(z) = \frac{p}{1 - (1 - p)z}$$

egyenletnek. Ez egy másodfokú egyenletre vezet, a megoldásai

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{p}{1 - p}.$$

$p = 0.4$ -re $z_2 < z_1$, tehát $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^* = z_2 = 2/3$, és

$\mathbb{P}(\text{a folyamat sosem hal ki}) = 1/3$.

$p = 0.6$ -re $z_1 < z_2$, tehát $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = z^* = z_1 = 1$, és

$\mathbb{P}(\text{a folyamat sosem hal ki}) = 0$.

1. feladat

(e) $p = 0.4$ esetén a folyamat szuperkritikus és

$$\mathbb{E}(N) = \infty.$$

$p = 0.6$ esetén a folyamat szubkritikus és

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{1 - G'(1)} = \frac{1}{1 - 2/3} = 3.$$

1. feladat

Összefoglalva:

	$p = 0.4$	$p = 0.6$
$\mathbb{E}(X_1)$	1.5	0.667
$\mathbb{P}(X_2 = 0)$	0.526	0.789
$\mathbb{E}(X_3)$	3.375	0.296
$\mathbb{P}(\text{sosem hal ki})$	0.333	0
$\mathbb{E}(N)$	∞	3

3. feladat

Legyen egy elágazó folyamat utódeloszlásának generátorfüggvénye G . Fejezzük ki G segítségével a következő események feltételes valószínűségét!

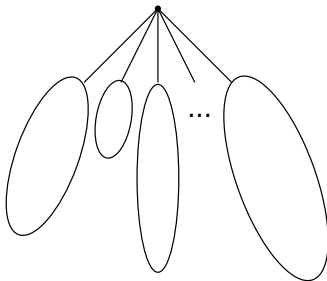
- (a) A folyamat kihal, feltéve, hogy az első generáció létszáma k .
- (b) A folyamat kihal, feltéve, hogy az első generáció nem halt ki.

3. feladat

Megoldás.

- (a) Feltéve, hogy $X_1 = k$, az elágazó folyamatnak k fae ága van, melyek mindegyikének az eloszlása megegyezik az eredeti folyamat eloszlásával. Tehát minden ág z^* valószínűséggel hal ki a többiektől függetlenül, és

$$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = (z^*)^k.$$



3. feladat

(b)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(\text{kihalás} | X_1 > 0) &= \frac{\mathbb{P}(\text{kihalás}, X_1 > 0)}{\mathbb{P}(X_1 > 0)} = \\
 &= \frac{\mathbb{P}(\text{kihalás}) - \mathbb{P}(\text{kihalás}, X_1 = 0)}{\mathbb{P}(X_1 > 0)} = \\
 &= \frac{\mathbb{P}(\text{kihalás}) - \mathbb{P}(X_1 = 0)}{\mathbb{P}(X_1 > 0)} = \\
 &= \frac{z^* - G(0)}{1 - G(0)}.
 \end{aligned}$$

4. feladat

Egy lánclevél arra kéri olvasóját, hogy továbbítsa 12 másik embernek. Aki megkapja, azoknak a 92%-a törli a levelet továbbítás nélkül, 8% azonban továbbítja 12 másik embernek.

- (a) Modellezzük a helyzetet elágazó folyamattal. Mi az utódeloszlás várható értéke? Szubkritikus, kritikus vagy szuperkritikus a folyamat?
- (b) Mekkora a valószínűsége, hogy a levél terjedése előbb-utóbb megáll?
- (c) Feltéve, hogy a levél eredeti szerzője 12 embernek küldte el, mennyi a lánclevél "élettartama" során elküldött levelek számának várható értéke?

4. feladat

(a) Megoldás. Az utódeloszlás

$$\mathbb{P}(X_1 = 0) = 0.92, \quad \mathbb{P}(X_1 = 12) = 0.08,$$

generátorfüggvénye

$$G(z) = 0.92 + 0.08z^{12},$$

várható értéke

$$G'(1) = 0.96z^{11} \Big|_{z=1} = 0.96 < 1,$$

tehát a folyamat szubkritikus.

(b) Szubkritikus folyamatra $\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1$, tehát 1 valószínűséggel a levél terjedése előbb-utóbb megáll.

4. feladat

(c) A folyamat méretét jelölje N ; ekkor

$$\mathbb{E}(N) = \frac{1}{1 - G'(1)} = \frac{1}{1 - 0.96} = 25.$$

Feltéve, hogy a levél eredeti szerzője 12 embernek küldte el, a folyamatnak 12 ága van, melyek mindegyike átlagosan 25 embert tartalmaz. Tehát

$$\mathbb{E}(N|X_1 = 12) = 12 \cdot 25 + 1$$

(mivel a szerző a 12 ághoz képest még +1 egyed a folyamatban).

Viszont az elküldött levelek számának várható értéke ennél eggyel kevesebb, mivel ott nem kell a szerzőt számolni. Tehát az elküldött levelek számának várható értéke 300.

5. feladat

Dömötör kap egy beadandó feladatot a tanárától, amit 50% eséllyel old meg helyesen. Amennyiben elrontja, kap 2 további feladatot, melyeket szintén 50% eséllyel old meg helyesen (az előzményektől függetlenül). Minden további hibás megoldás „jutalma” is két további feladat. Mennyi a valószínűsége, hogy Dömötörnek egy idő után nem kell további feladatokat megoldania? Várhatóan hány feladatot kell eddig megoldania összesen?

Megoldás. Legyenek a feladatok az egyedek, és egy feladatnak 0 vagy 2 utóda van attól függően, Dömötör helyesen oldja-e meg. Az így kapott elágazó folyamat utódeloszlásának generátorfüggvénye

$$G(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}z^2.$$

5. feladat

$$G'(1) = 1,$$

így a folyamat kritikus (és nem a determinisztikus folyamat), tehát

$$\mathbb{P}(\text{kihalás}) = 1,$$

ami jó hír.

Viszont ha N jelöli az összes feladatok számát, akkor

$$\mathbb{E}(N) = \infty,$$

ami nem annyira.