

Folytonos idejű Markov-láncok

Sztochasztika

Horváth Illés

2024/11/12

- (1) Kiindulási pont: Markov-láncok
- (2) Infinitezimális generátor mátrix
- (3) „Óra és kocka” vs. „versengő órák” értelmezés
- (4) Hosszú távú viselkedés
- (5) Rövid távú viselkedés
- (6) Beágyazott Markov-lánc
- (7) Véges és végtelen sorok

Folytonos idejű Markov-láncok

A (diszkrét idejű) Markov-lánc olyan rendszereket modellez, ahol a változás szabályos időközönként történik (naponta, havonta stb.)
Sok valós helyzetben a változás bármikor bekövetkezhet.

Folytonos idejű Markov-láncokat szeretnénk definiálni, ahol a változás bármikor bekövetkezhet, de a rendszer egyébként hasonlóan viselkedik a diszkrét idejű Markov-láncokhoz.

A folytonos idejű Markov-láncok többféleképpen is bevezethetők:

- (1) Diszkrét idejű Markov-láncból indulunk ki, és randomizáljuk a várakozási időt az átmenetek között.
- (2) Diszkrét idejű Markov-láncból indulunk ki, és a diszkrét időegységgel 0-hoz tartunk.
- (3) Absztrakt félcsoportos definícióval.

Mi az (1)-est fogjuk csinálni, de végeredményben mindhárom ekvivalens és ugyanazt a folyamatot definiálja.

A kiindulási pont egy diszkrét idejű Markov-lánc (DTMC, discrete time Markov chain). Ahelyett, hogy a következő változás 1 időegység múlva történne, randomizáljuk a jelenlegi állapotban eltöltött időt. Legyen ez az idő T ; mi lehet T eloszlása?

A kulcs a Markov-tulajdonság, azaz hogy a jövő csak a jelenlegi állapottól függ, a múlttól nem. Ezt továbbra is szeretnénk megőrizni, viszont ebbe most az is beletartozik, hogy *mennyi ideje van a Markov-lánc a jelenlegi állapotban*. Ez az ún. memóriamentes tulajdonság, amivel már találkoztunk a Poisson-folyamatoknál.

Az egyetlen folytonos memóriamentes eloszlás az exponenciális eloszlás, tehát T exponenciális eloszlású kell legyen. A paraméter függhet az aktuális i állapottól; λ_i -vel fogjuk jelölni.

Folytonos idejű Markov-lánc megadása

Összességében egy folytonos idejű Markov-lánc megadható a következő adatok segítségével:

- állapotok listája;
- P átmenet-valószínűség mátrix;
- $v(0)$ kiindulási állapotvektor;
- $\lambda_1, \dots, \lambda_k > 0$ számok listája, ahol ezek az egyes állapotokban eltöltött exponenciális várakozási idő paraméterei.

A fenti információk alapján egy folytonos idejű Markov-láncot a következő módon lehet szimulálni.

Ha a Markov-lánc az i állapotban van, generálunk egy $T \sim \text{EXP}(\lambda_i)$ valószínűségi változót.

T idő eltelte után a következő állapotot véletlenszerűen választjuk ki a P mátrix i -edik sora alapján, függetlenül T -től (és általában a múlttól is).

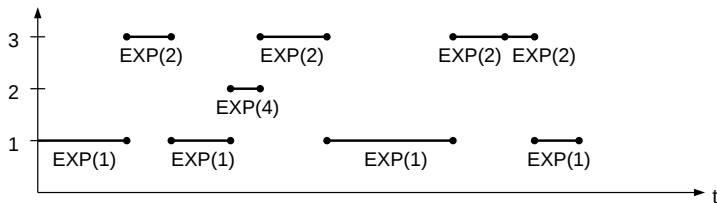
A Markov-lánc átlép az új állapotba, ezután a fenti ciklust újratekdjük egy új T generálásával stb.

Példa. Legyen egy diszkrét idejű Markov-láncunk 3 állapoton $v(0) = (1\ 0\ 0)$ kezdővektorral és

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

átmenet-valószínűség mátrixszal, és legyenek

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$. Ekkor a diszkrét idejű Markov-lánc $1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 3, 1, \dots$ realizációja a megfelelő folytonos idejű Markov-láncre a következő lesz:



Infinitezimális generátor

Az előző konstrukciót tekintjük a folytonos idejű Markov-lánc (CTMC, continuous time Markov chain) definíciójának. Teljesíti a Markov-tulajdonságot.

Legyen $v(t)$ az eloszlásvektor t időpontban, vagyis

$$v_i(t) = \mathbb{P}(\text{a Markov-lánc az } i \text{ állapotban van } t\text{-kor}).$$

Ezúttal $t \in [0, \infty)$, nemcsak egész értékeket vehet fel az idő.

Tétel.

$$v(t) = v(0)e^{Qt},$$

ahol a Q mátrixot $(P - I)$ -ből kapjuk úgy, hogy az i -edik sort megszorozzuk λ_i -vel minden i -re, és I az identitásmátrix.

Q a folyamat *infinitezimális generátora* vagy röviden *generátora*.

Biz. (vázlat) Legyen

$p_{ij}(t) = \mathbb{P}(\text{a MC a } j \text{ állapotban van } t\text{-kor} | \text{az } i \text{ állapotból indult}),$

ezeket összegyűjtjük egy $P(t)$ mátrixba. $P(t)$ teljesíti a Chapman–Kolmogorov egyenleteket (vagy félcsoport egyenleteket):

$$P(t+s) = P(t)P(s) \quad \forall s, t \geq 0$$

a teljes valószínűség tétele miatt. Ennek megoldása

$$P(t) = e^{Qt} \quad \text{ahol} \quad Q = \left. \frac{d}{dt} P(t) \right|_{t=0}.$$

Végül $\left. \frac{d}{dt} P(t) \right|_{t=0}$ kiszámítása pont a tételben definiált Q mátrixot adja.

Az előző példában

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix},$$

és $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2$, ahonnan

$$P - I = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & -1 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & -3/4 \end{bmatrix}$$

és

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

A következő tulajdonságok teljesülnek a generátorra:

- Q átlós elemei negatívak vagy 0-k;
- a főátlón kívüli elemek nemnegatívak, és
- a sorösszegek 0-k.

A fenti tulajdonságok elegendőek is, tehát bármely Q mátrix, ami teljesíti a fenti tulajdonságokat, alkalmas generátornak.

Egy A mátrixra e^A kiszámítható vagy hatványsor alakban:

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!},$$

vagy Jordan-normálalakból.

Lesznek majd egyszerűen kiszámítható közelítések is e^{Qt} -re.

A folytonos idejű Markov-lánc konstrukciójában először az egy állapotban eltöltött véletlen időt generáljuk le, majd ha az eltelt, akkor választjuk ki a következő állapotot véletlenszerűen.

Erre „óra és kocka” interpretációként hivatkozunk, mert gondolhatunk rá úgy, hogy először felhúzzunk egy vekkert, ami véletlen $\text{EXP}(\lambda_i)$ idő után csörög, majd amikor csörög, gurítunk egy dobókockával a következő állapot kisorsolásához.

Megnézünk egy másikat, de ezzel ekvivalens értelmezést.

Lemma

Legyenek $X_1, \dots, X_k$ függetlenek, $X_i \sim \text{EXP}(\mu_i)$ és

$$Y = \min(X_1, \dots, X_k).$$

Ekkor $Y \sim \text{EXP}(\mu_1 + \dots + \mu_k)$ és

$$\mathbb{P}(Y = X_i) = \frac{\mu_i}{\mu_1 + \dots + \mu_k}.$$

Nem biz. (De $k = 2$ -re egyszerű számolás és onnan teljes indukcióval adódik általános k -ra.)

A korábbi példára:

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix},$$

és legyen mondjuk a Markov-lánc épp a 2-es állapotban.

A 2-es állapotból a Markov-lánc átléphet az 1-es vagy 3-as állapotba. Ezúttal 2 vekkert húzunk fel, egyet-egyet a lehetséges átmenetekhez: $T_{2 \rightarrow 1} \sim \text{EXP}(4/5)$ és $T_{2 \rightarrow 3} \sim \text{EXP}(16/5)$, és legyenek függetlenek.

Az órák *versenyeznek*: amelyik először csörög, az az átmenet történik meg (és a másik nem).

Mit mond erről a konstrukcióról a lemma?

A következő átmenet ideje

$$T = \min(T_{2 \rightarrow 1}, T_{2 \rightarrow 3}).$$

A lemma szerint $T \sim \text{EXP}(16/5 + 4/5)$, aminek a paramétere éppen $\lambda_2 = 4$.

Továbbá

$$\mathbb{P}(T = T_{2 \rightarrow 1}) = \frac{4/5}{4/5 + 16/5} = 1/5,$$

$$\mathbb{P}(T = T_{2 \rightarrow 3}) = \frac{16/5}{4/5 + 16/5} = 4/5,$$

ami összhangban van P második sorával:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

A fenti „versengő órák” interpretáció ekvivalens az óra és kocka interpretációval. Ez általában minden folytonos idejű Markov-láncre is igaz, azaz bármelyik értelmezés használható.

Példa: nézzük egy boltban a vásárlók számát a sorban. Ha éppen 2-en állnak sorba, akkor a következő átmenet után vagy 1, vagy 3 vásárló lesz a sorban, attól függően, hogy

- a sor elején álló vásárlót szolgálják ki hamarabb, vagy
- egy új vásárló áll be a sor végére hamarabb.

A sorhossz $+1$ -gyel vagy -1 -gyel változik, attól függően, melyik következik be előbb, így itt természetes módon megjelenik a kétfajta változás, amik úgy mond egymással versenyeznek.

Ez az interpretáció sok valós helyzetben természetes: a rendszer változásai sokféle versengő hatás eredménye.

Átmenet ráták

Vegyük megint a

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

példát. A főátlón kívüli elemek az *átmenet ráták*. (Emiatt Q -t hívják rátamátrixnak is.)

Ezek hasonlók a Poisson-folyamat rátájához: ha például a Markov-lánc a 2-es állapotban van, akkor a következő $2 \rightarrow 1$ átmenetig szükséges idő eloszlása $\text{EXP}(4/5)$, pont mint egy Poisson-folyamatnál, és a következő $2 \rightarrow 3$ átmenetig szükséges idő eloszlása $\text{EXP}(16/5)$.

A főátlóbeli negatív elemek a *kimenő ráták* az egyes állapotokból (– előjellel).

Egy átmenet után a Markov-lánc egy új állapotban van, az új állapotnak megfelelő lehetséges célállapotokkal és átmenet rátákkal.

Poisson-folyamat mint Markov-lánc

Egy $PPP(\lambda)$ Poisson-folyamat is tekinthető folytonos idejű Markov-láncnak. Az $N(t)$ számláló folyamat lehetséges értékei $0, 1, 2, \dots$

Az $0 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 2$ stb. átmenetek között eltelt idő eloszlása mindig $EXP(\lambda)$, tehát $N(t)$ egy Markov-lánc a $0, 1, 2, \dots$ állapottéren, a generátora

$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -\lambda & \lambda & 0 & \\ 0 & 0 & -\lambda & \lambda & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

(Q egy “végtelen mátrix”, de emiatt most ne aggódjunk.)

Egy kis pénzváltó irodába átlagosan 5 percenként jön egy ügyfél. Egy ügyfél átlagos kiszolgálási ideje 2 perc. Az éppen kiszolgálás alatt álló ügyfélen kívül legfeljebb 1 másik ügyfél tartózkodhat az irodában; ha egy ügyfél olyankor érkezik, amikor az iroda tele van, akkor továbbmegy és nem tér vissza (pl. átmegy egy másik pénzváltóhoz).

Modellezzük a fenti helyzetet folytonos idejű Markov-lánccal! Az állapotok 0, 1, 2 aszerint, hogy hány ügyfél van bent.

Ahhoz, hogy a folyamat (folytonos idejű) Markov-lánc legyen, arra van szükségünk, hogy az egyes állapotokban eltöltött idők exponenciális eloszlásúak és függetlenek legyenek.

Az érkezési folyamatra nézve ez pont azt jelenti, hogy az ügyfelek Poisson-folyamat szerint érkeznek 0.2 ügyfél per perc rátával.

Jogos-e ezt feltenni?

Jogos, hiszen az érkezés sok, független forrásból történik, és mindnek a kontribúciója kicsi.

A kiszolgálásról annyit tudunk, hogy az átlagos kiszolgálási idő 2 perc. Tegyük fel, hogy a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású! Ekkor, hogy a várható érték valóban 2 perc legyen, az exponenciális eloszlás paramétere 0.5 kell legyen.

És ez a feltevés jogos-e? Nem tudjuk. Azonban a Markov-tulajdonság csak exponenciális várakozási idő esetén teljesül, tehát ha nincs több információ megadva, akkor akár fel is tehetjük.

Ha a kiszolgálási idő nem exponenciális eloszlású, akkor a Markov-tulajdonság nem teljesül, a folyamat nem folytonos idejű Markov-lánc, és az elemzéséhez más, bonyolultabb eszközök kellenek.

Tehát a továbbiakban feltesszük, hogy az érkezés Poisson-pontfolyamat szerint történik, és a kiszolgálási idő exponenciális eloszlású, és akkor a folyamat tényleg Markov-lánc. Írjuk fel a Q mátrixot!

Az érkezéseknek megfelelő átmenetek $0 \rightarrow 1$ és $1 \rightarrow 2$, ezek rátája 0.2.

A kiszolgálásnak megfelelő átmenetek $1 \rightarrow 0$ és $2 \rightarrow 1$, ezek rátája 0.5.

$0 \rightarrow 2$ és $2 \rightarrow 0$ átmenetek nem lehetségesek, folytonos időben nem érkezik 2 ügyfél pontosan egyszerre.

Az átlós elemeket írjuk be utoljára úgy, hogy a sorösszegek 0-k legyenek. Összességében a generátor

$$Q = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.2 & 0 \\ 0.5 & -0.7 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & -0.5 \end{bmatrix}.$$

Szerkezet és stacionárius eloszlás

Az irreducibilitást folytonos idejű Markov-láncokra ugyanúgy definiáljuk, mint diszkrét idejű Markov-láncokra.

Az egyszerűség kedvéért ebben a kurzusban csak irreducibilis folytonos idejű Markov-láncokkal foglalkozunk.

Periodicitás folytonos idejű Markov-láncokra nincs; ha úgy tetszik, minden folytonos idejű Markov-lánc automatikusan aperiodikus.

A stacionárius eloszlás definíciója picit eltér a diszkrét idejű esettől: $v_{\text{st}} = (x_1 \dots x_k)$ stacionárius, ha

$$\begin{aligned}x_1 + \dots + x_k &= 1, \\ v_{\text{st}} Q &= 0,\end{aligned}$$

ahol 0 a konstans 0 vektort jelöli.

$$v(0) = v_{\text{st}} \implies v(t) = v_{\text{st}} \quad \forall t > 0.$$

Tétel. (Fő tétel)

- (a) *Bármely (véges állapotterű) folytonos idejű Markov-láncre létezik legalább egy v_{st} .*
- (b) *Ha a Markov-lánc irreducibilis, akkor v_{st} egyértelmű, az elemei szigorúan pozitívak, és*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_{st}$$

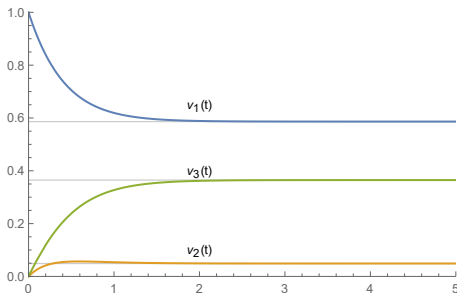
tetszőleges $v(0)$ kezdeti vektor esetén.

- (c) *Ha a Markov-lánc irreducibilis, akkor hosszú távon az idő x_i részét tölti az i állapotban, ahol $v_{st} = (x_1 \dots x_k)$.*

$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_{\text{st}}$ konvergenciasebessége gyors, hasonlóan a diszkrét idejű esethez. A korábbi példára

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

és $v_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, esetén $v(t)$ (a 3 színes függvény) és v_{st} (szürke vízszintes vonalak) alakulása:



A fő tétel alapján a hosszú távú közelítés e^{Qt} -re

$$e^{Qt} \approx \begin{bmatrix} \frac{v_{st}}{v_{st}} \\ \vdots \\ \frac{v_{st}}{v_{st}} \end{bmatrix} \quad \text{ha } t \text{ nagy.}$$

A rövid távú közelítés

$$e^{Qt} \approx I + tQ \quad \text{ha } t \text{ kicsi.}$$

(Ez tulajdonképpen az e^x függvény elsőrendű közelítése.)

A rövid távú közelítésnek van egy érdekes értelmezése: ha t kicsi, akkor t idő alatt lehet

- 0 átmenet 1-hez közeli valószínűséggel;
- 1 átmenet t -vel arányos valószínűséggel, és
- 2 vagy több átmenet valószínűsége ezekhez képest elhanyagolható.

Tétel. (Ergodtétel)

Ha egy irreducibilis Markov-lánc konkrét realizációját

$$X(t), \quad t \geq 0$$

jelöli, akkor tetszőleges f , állapotokon értelmezett függvényre

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T f(X(t)) dt}{T} = \mathbb{E}_{st}(f),$$

ahol

$$\mathbb{E}_{st}(f) = x_1 f(1) + \cdots + x_k f(k),$$

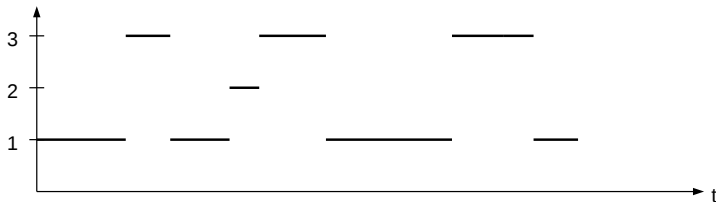
ahol

$$v_{st} = (x_1 \ \dots \ x_k).$$

Beágyazott Markov-lánc

Egy folytonos idejű Markov-lánc beágyazott Markov-lánca a meglátogatott állapotok sorozata, ami egy diszkrét idejű Markov-lánc.

A korábbi példára a



realizációnak megfelelő beágyazott Markov-lánc realizáció

$1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 1, \dots$

Beágyazott Markov-lánc

Számítsuk ki a beágyazott Markov-lánc P átmenet-valószínűség mátrixát. A példában

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1/3 & 2/3 \\ 4/5 & -4 & 16/5 \\ 3/2 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}.$$

Az 1-es állapotból a lehetséges átmenetek $1 \rightarrow 2$ és $1 \rightarrow 3$, és

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 2 | \text{a jelenlegi állapot } 1) = \frac{1/3}{1/3 + 2/3} = 1/3,$$

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot } 3 | \text{a jelenlegi állapot } 1) = \frac{2/3}{1/3 + 2/3} = 2/3.$$

Ez alapján P' első sora

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

P' második sorához

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot 1} | \text{a jelenlegi állapot 2}) = \frac{4/5}{4/5 + 16/5} = 1/5,$$

$$\mathbb{P}(\text{a következő állapot 3} | \text{a jelenlegi állapot 2}) = \frac{16/5}{4/5 + 16/5} = 4/5.$$

(A $4/5 + 16/5$ nevező egyébként pont megegyezik $|q_{22}| = 4$ -gyel, mivel Q minden sorának összege 0.)

A fenti számítások összefoglalva: P' -t úgy kapjuk, hogy először Q i -edik sorát leosztjuk $|q_{ii}|$ -vel minden i -re, majd hozzáadjuk az I identitásmátrixot. A végeredmény

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Beágyazott Markov-lánc

A fenti számítás lényegében a korábbi $P \rightarrow P - I \rightarrow Q$ átalakítás megfordítása. Vajon tényleg vissza is kapjuk az eredeti P mátrixot?

$$P' = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/5 & 0 & 4/5 \\ 3/4 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}.$$

Nem pont ugyanaz a mátrix! Az első két sor ugyanaz, de a harmadik eltérő.

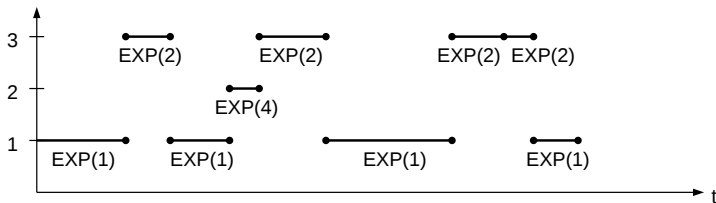
Ennek oka, hogy az eredeti Markov-láncban a $3 \rightarrow 3$ átmenetnek pozitív a valószínűsége. A beágyazott Markov-láncre viszont a következő állapot mindig az, ami *ténylegesen eltér* az aktuális állapottól. Emiatt ami eredetileg egy állapotban eltöltött több lépés, az a beágyazott Markov-láncban egyetlen lépésként jelenik meg.

Beágyazott Markov-lánc

Tehát ha az eredeti P átmenet-valószínűség mátrixú Markov-lánc realizációja

$$1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 3, 1, \dots,$$

és a Q generátorú folytonos idejű Markov-lánc realizációja



akkor a P' -höz tartozó beágyazott Markov-lánc realizációja

$$1, 3, 1, 2, 3, 1, 3, 1, \dots$$

Stacionárius és beágyazott stacionárius eloszlás

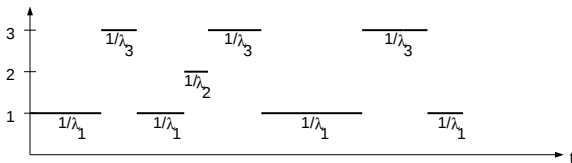
Legyen $v_{\text{st}} = (x_1 \ x_2 \ \dots \ x_k)$ a Q generátorú CTMC stacionárius eloszlása, és legyen $u_{\text{st}} = (y_1 \ y_2 \ \dots \ y_k)$ a P' átmenet-valószínűség mátrixú beágyazott Markov-lánc stacionárius eloszlása. Jelöljük továbbá $\lambda_i = |q_{ii}|$ -vel a kimenő rátákat. Ekkor

Lemma

$$x_i = \frac{y_i / \lambda_i}{\sum_j y_j / \lambda_j} \qquad y_i = \frac{x_i \lambda_i}{\sum_j x_j \lambda_j}.$$

Stacionárius és beágyazott stacionárius eloszlás

Biz. y_i az i állapotban eltöltött intervallumok *számának aránya* az összes intervallumon belül. Viszont az intervallumok nem egyforma hosszúak.



x_i az i állapotban eltöltött *idő aránya* a teljes időhöz képest. Az intervallum darabszámának arányához képest ezt még súlyozni kell az intervallumok hosszával is. Az i állapotban eltöltött idő átlagos hossza $1/\lambda_i$, ahonnan

$$x_i = \frac{y_i / \lambda_i}{\sum_j y_j / \lambda_j}.$$

(A nevező csak normalizálás.) A lemma másik képlete ekvivalens.

1. feladat

Egy gép $\text{Exp}(0,1)$ ideig működik (órában mérve), majd elromlik. Ha elromlott, azonnal elkezdik javítani; a javítás $\text{Exp}(0,9)$ ideig tart (órában), és független a működési időszak hosszától.

- (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel az infinitezimális generátort.
- (b) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú idő alatt a teljes idő mekkora része telik javítással?
- (c) Amíg a gép működik, óránként 14000 forint bevételt termel. A szerelő óradíja 7000 forint. Mekkora átlagos „nettó” bevételt termel óránként a gép hosszú távon?
- (d) Adjuk meg a beágyazott diszkrét idejű Markov-lánc átmenet-valószínűség mátrixát.

1. feladat

Megoldás.

- (a) Az állapotok: 1 - működik, 2 - javítás alatt áll. A lehetséges átmenetek $1 \rightarrow 2$ és $2 \rightarrow 1$, és mivel a várakozási idő mindig exponenciális eloszlású a múlttól függetlenül, ezért a Markov-tulajdonság teljesül, és ez egy Markov-lánc. Irreducibilis.

$$Q = \begin{bmatrix} -0.1 & 0.1 \\ 0.9 & -0.9 \end{bmatrix}.$$

- (b) Legyen $v_{\text{st}} = (x_1 \ x_2)$, ekkor

$$-0.1x_1 + 0.9x_2 = 0,$$

$$0.1x_1 - 0.9x_2 = 0,$$

$$x_1 + x_2 = 1,$$

aminek a megoldása

$$v_{\text{st}} = (x_1 \ x_2) = \left(\frac{9}{10} \ \frac{1}{10} \right).$$

1. feladat

(b) Hosszú távon az idő $x_2 = \frac{1}{10}$ részében van javítás alatt a gép.

(c) Az ergodtétel alapján a hosszú távú átlagos nettó profit

$$\frac{9}{10} \cdot 14000 + \frac{1}{10} \cdot (-7000) = 12900$$

forint per óra.

(d) A beágyazott Markov-lánc átmenet-valószínűség mátrixa (nem túl izgalmas):

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. feladat

Tivadar szabadúszó programozó. Kétféle munkát vállal, melyek hossza véletlenszerűen változik. Az A típusú munka átlagosan 1 hónapig tart, a B típusú munka átlagosan 2 hónapig tart. Amikor Tivadar egy munkája véget ér, akkor átlagosan $2/3$ hónap telik el, míg érkezik megrendelés A típusú munkára, illetve átlagosan 1 hónap telik el, amíg érkezik megrendelés B típusúra. Azt vállalja el, amelyik előbb jön.

- (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.
- (b) Tivadarnak most éppen nincs munkája. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap A típusú munkára ajánlatot? Mennyi a valószínűsége, hogy 2 nap múlva A típusú munkán fog dolgozni? Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap bármilyen típusú munkára ajánlatot?
- (c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú távon az idő mekkora részét tölti Tivadar A típusú munkával?

4. feladat

- (d) Tivadar napidíja (ezer forintban) A típusú munka esetén 20, B típusú munka esetén 50. Számítsuk ki, átlagosan mennyi a napi keresete hosszú távon.
- (e) Írjuk fel a beágyazott Markov-lánc átmenet-mátrixát.
- (f) Hosszú távon az elvállalt munkák hányadrésze A típusú?
- (g) Tegyük fel, hogy a B típusú munka két egymást követő részből áll, melyek hossza független és külön-külön exponenciális eloszlású 1 várható értékkel (továbbá az A típusú munka hossza exponenciális eloszlású és a tétlen időszak hossza is exponenciális eloszlású). Írjuk fel az ennek megfelelő Markov-láncot, és számítsuk ki a stacionárius eloszlást ebben az esetben is. Vessük össze az eredeti ML stacionárius eloszlásával. Próbáljuk szóban megfogalmazni a két folyamat közti különbséget.
- (h) Tivadar úgy dönt, hogy A típusú munkát nem vállal többé. Számítsuk ki, átlagosan mennyi lesz így a napi keresete hosszú távon.

4. feladat

Megoldás.

- (a) Modellezzük a folyamatot folytonos idejű Markov-lánccal! Mik az állapotok? Írjuk fel a generátort.

Megoldás. Az állapotok 0, A, B (0 az, hogy éppen nincs munkája). A lehetséges átmenetek

$0 \rightarrow A, 0 \rightarrow B, A \rightarrow 0, B \rightarrow 0$. Feltéve, hogy a munkák között eltelő várakozási idő is exponenciális eloszlású és a munkák hossza is exponenciális eloszlású, ez egy folytonos idejű Markov-lánc.

Az A típusú ajánlatok $3/2$ rátával érkeznek, a B típusú ajánlatok rátája 1.

A generátor

$$Q = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

4. feladat

- (b) Tivadarnak most éppen nincs munkája. Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap A típusú munkára ajánlatot? Mennyi a valószínűsége, hogy 2 nap múlva A típusú munkán fog dolgozni? Mennyi a valószínűsége, hogy a következő 2 napban kap bármilyen típusú munkára ajánlatot?

Megoldás. Jelölje T_A az első A típusú ajánlatig szükséges időt. Ekkor $T_A \sim \text{EXP}(3/2)$, és

$$\mathbb{P}(T_A < 2/30) = 1 - e^{-2/30 \cdot 3/2} \approx 0.095.$$

Jelölje T az első bármilyen típusú ajánlatig szükséges időt. Ekkor $T \sim \text{EXP}(5/2)$, és

$$\mathbb{P}(T < 2/30) = 1 - e^{-2/30 \cdot 5/2} \approx 0.154.$$

- (b) Ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy 2 nap múlva mekkora valószínűséggel dolgozik Tivadar éppen A típusú munkán, akkor a rövid távú közelítést használhatjuk; $v(0) = (1 \ 0 \ 0)$, és

$$v(2/30) = v(0)e^{Q \cdot 1/15} \approx v(0)(I + Q/15) =$$

$$(1 \ 0 \ 0) \cdot \begin{bmatrix} 5/6 & 1/10 & 1/15 \\ 1/15 & 14/15 & 0 \\ 1/30 & 0 & 29/30 \end{bmatrix} = (5/6 \ 1/10 \ 1/15),$$

tehát a kérdéses valószínűség közelítőleg $1/10$. (Egyébként a valószínűség valójában ≈ 0.0892).

4. feladat

- (c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást. Hosszú távon az idő mekkora részét tölti Tivadar A típusú munkával?

Megoldás. Legyen $v_{st} = (x_1 \ x_2 \ x_3)$. Ekkor

$$-5/2x_1 + x_2 + 1/2x_3 = 0$$

$$3/2x_1 - x_2 = 0$$

$$x_1 - 1/2x_3 = 0,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1.$$

A megoldása

$$v_{st} = (x_1 \ x_2 \ x_3) = \left(\frac{2}{9} \ \frac{3}{9} \ \frac{4}{9} \right).$$

Hosszú távon az idő $x_2 = \frac{3}{9}$ részét tölti Tivadar A típusú munkával.

4. feladat

- (d) Tivadar napidíja (ezer forintban) A típusú munka esetén 20, B típusú munka esetén 50. Számítsuk ki, átlagosan mennyi a napi keresete hosszú távon.

Az ergodtétel alapján az átlagos napi keresete hosszú távon

$$0 \cdot x_1 + 20000 \cdot x_2 + 50000 \cdot x_3 = 0 \cdot \frac{2}{9} + 20000 \cdot \frac{3}{9} + 50000 \cdot \frac{4}{9} \approx 28900$$

forint per nap.

- (e) Írjuk fel a beágyazott Markov-lánc átmenet-mátrixát.

A beágyazott Markov-lánc átmenet-valószínűség mátrixához először leosztjuk Q i -edik sorát $|q_{ii}|$ -vel minden i -re, majd hozzáadunk I -t:

$$\begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & -1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 3/5 & 2/5 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 3/5 & 2/5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. feladat

(f) Hosszú távon az elvégzett munkák hányadrésze A típusú?

Megoldás. Legyen $u_{\text{st}} = (y_1 \ y_2 \ y_3)$ a beágyazott Markov-lánc stacionárius eloszlása. Ekkor

$$u_{\text{st}} \cdot P = u_{\text{st}}, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

alapján

$$y_1 = y_2 + y_3, \quad \frac{3}{5}y_1 = y_2, \quad \frac{2}{5}y_1 = y_3, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 1,$$

aminek a megoldása

$$u_{\text{st}} = (y_1 \ y_2 \ y_3) = \left(\frac{1}{2} \ \frac{3}{10} \ \frac{2}{10} \right).$$

y_2 és y_3 jellemzi az A és B típusú munkákat, tehát az összes elvégzett munkán belül az A típusú munkák *darabszámának* aránya

$$\frac{3/10}{3/10 + 2/10} = \frac{3}{5}.$$

- (g) Tegyük fel, hogy a B típusú munka két egymást követő részből áll, melyek hossza független és külön-külön exponenciális eloszlású 1 várható értékkel (továbbá az A típusú munka hossza exponenciális eloszlású és a tétlen időszak hossza is exponenciális eloszlású). Írjuk fel az ennek megfelelő Markov-láncot, és számítsuk ki a stacionárius eloszlást ebben az esetben is. Vessük össze az eredeti ML stacionárius eloszlásával. Próbáljuk szóban megfogalmazni a két folyamat közti különbséget.

4. feladat

(g) Megoldás. Ezúttal az állapotok 0, A, B1, B2, és

$$Q = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

mivel egy B típusú munka mindkét felének a várható értéke 1 hónap, így az idejük EXP(1) eloszlású.

A stacionárius eloszlás

$$v_{\text{st}} = \left(\frac{2}{9} \frac{3}{9} \frac{2}{9} \frac{2}{9} \right),$$

míg az eredeti stacionárius eloszlás

$$v_{\text{st}} = \left(\frac{2}{9} \frac{3}{9} \frac{4}{9} \right).$$

Ugyanaz-e a két folyamat?

4. feladat

- (g) Bár a két folyamat stacionárius eloszlása (és így a hosszú távú viselkedésük) konzisztens, a két folyamat különböző.

A B munkával eltöltött idő eloszlása eltérő a két esetben. Az eredeti folyamatra ez $\text{EXP}(1/2)$, de a második folyamatra $\text{Gamma}(2,1)$ (más néven $\text{Erlang}(2,1)$), aminek a várható értéke ugyanannyi (emiat konzisztens a stacionárius eloszlás), de a szórása kisebb.

Lényegében azzal, hogy egy állapotot kicseréltünk egy 2 állapotú mini Markov-láncre, az ott töltött idő eloszlását módosítottuk exponenciális eloszlás helyett valami más eloszlásra.

Kitekintés. Általában tetszőleges eloszlás közelíthető egy megfelelő (szükség esetén bonyolultabb) mini Markov-lánc segítségével. Erről szólnak a fázis-típusú eloszlások (phase-type distribution). Ehhez is ajánlom Telek Miklós tárgyát.

- (h) Tivadar úgy dönt, hogy A típusú munkát nem vállal többé. Számítsuk ki, átlagosan mennyi lesz így a napi keresete hosszú távon.

Megoldás. Most csak 2 állapot van, 0 és B,

$$Q = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$v_{\text{st}} = (0.5 \ 0.5),$$

és az ergodtétel alapján az átlagos napi keresete hosszú távon

$$0.5 \cdot 50000 + 0.5 \cdot 0 = 25000 \text{ (forint per nap).}$$

9. feladat

Egy sötét folyosót egyetlen lámpa világít meg, melyet a folyosóra belépéskor lehet felkapcsolni. Amikor valaki belép a folyosóra és a lámpa nem ég, felkapcsolja. A lámpa magától kapcsol ki pontosan 1 perc után; amíg világít, addig a kapcsoló újbóli megnyomása nem csinál semmit. Az emberek Poisson folyamat szerint érkeznek a folyosóra, átlagosan 4 percenként. Jelölje X_t a lámpa állapotát t -kor.

- (a) Mik a lehetséges állapotok? Teljesül-e X_t -re a Markov-tulajdonság?
- (b) Az idő mekkora részében világít a lámpa?
- (c) Egy éppen érkező ember mekkora eséllyel találja a lámpát felkapcsolva?
- (d) Tegyük fel, hogy egy embernek 20 másodpercig tart átkelni a folyosón. Feltéve, hogy felkapcsolva találta a lámpát, amikor belépett, mekkora az esélye, hogy végigér a folyosón égő lámpa mellett?

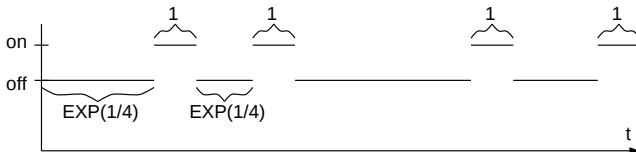
9. feladat

Megoldás.

(a) Az állapotok: 1 - ég a lámpa, 0 - nem ég.

Viszont a lámpa állapota nem egy folytonos idejű Markov-lánc, mivel az 1-es állapotban a várakozási idő nem exponenciális eloszlású. Másképp mondva, a folyamat jövője szempontjából nem elég azt tudni, hogy most ég a lámpa, az is számít, hogy mennyi ideje ég, így a Markov-tulajdonság nem teljesül.

(b) Ez ugyan nem egy Markov-folyamat, de szerencsére aránylag egyszerű szerkezetű.



- (b) Az 1 és 0 állapotok váltakoznak; mindegyik 1-es állapot 1 percre tart, a 0 állapotok átlagos hossza pedig 4 perc, így a lámpa az idő $\frac{1}{1+4} = 0.2$ részében ég.
- (c) Az érkezések függetlenek a lámpa állapotától, és a lámpa az idő 0.2 részében ég, tehát annak a valószínűsége, hogy egy érkező ember felkapcsolva találja a lámpát, szintén 0.2.
- (d) A lámpa 1 percre ég. Ha valaki az első 40 másodpercben érkezik, akkor még végigér a folyosón, egyébként a lámpa kialszik, mielőtt végigérne.

Ennek megfelelően a kérdéses valószínűség $\frac{40}{60} = \frac{2}{3}$.