

Jackson-hálózatok

Sztochasztika

Horváth Illés

2024/11/19

- (1) Laplace-transzformált
- (2) Sorbanállási hálózatok
- (3) Emlékeztető: Markov-sorok
- (4) Kimenő folyamat, Burke-tétel
- (5) Jackson-hálózatok
- (6) Forgalmi egyenlet, stabilitási feltétel
- (7) Stacionárius eloszlás
- (8) Zárt hálózatok
- (9) Feladatok

Laplace-transzformált

Előkészület: Laplace-transzformáció.

Egy $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény Laplace-transzformáltja

$$f^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

Egy $X \geq 0$ folytonos valószínűségi változó Laplace-transzformáltja

$$X^*(s) = E(e^{-sX}) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt,$$

ahol $f(t)$ az X sűrűségfüggvénye. Ha f sűrűségfüggvény, akkor $f^*(s)$ minden $\operatorname{Re}(s) \geq 0$ -ra értelmezett.

Példa. Az $X \sim \operatorname{EXP}(\lambda)$ eloszlás Laplace-transzformáltja

$$X^*(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \lambda e^{-\lambda t} dt = \lambda \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)t} dt = \frac{\lambda}{\lambda + s}.$$

Lemma (Teljes várható érték tétel Laplace-transzformáltra)

Ha X, Y, Z valószínűségi változók f_X, f_Y, f_Z sűrűségfüggvénnyel, és

$$\mathbb{P}(Z = X) = p, \quad P(Z = Y) = 1 - p,$$

akkor

$$Z^*(s) = pX^*(s) + (1 - p)Y^*(s).$$

Biz. Teljes valószínűség tétel alapján

$$P(Z < t) = pP(X < t) + (1 - p)P(Y < t),$$

$$f_Z(t) = pf_X(t) + (1 - p)f_Y(t),$$

$$Z^*(s) = pX^*(s) + (1 - p)Y^*(s).$$

További fontos tulajdonsága, hogy konvolúcióból (független összegből) szorzatot csinál.

Lemma

Ha X, Y valószínűségi változók függetlenek, és

$$Z = X + Y,$$

akkor

$$Z^*(s) = X^*(s) \cdot Y^*(s).$$

1. biz. Az $X^*(s) = E(e^{-sX})$ alak alapján; ha X és Y függetlenek, akkor e^{-sX} és e^{-sY} is függetlenek, és

$$\underbrace{E\left(e^{-s(X+Y)}\right)}_{Z^*(s)} = E\left(e^{-sX}e^{-sY}\right) = \underbrace{E\left(e^{-sX}\right)}_{X^*(s)} \underbrace{E\left(e^{-sY}\right)}_{Y^*(s)}.$$

2. biz. Ha $Z = X + Y$, akkor

$$f_Z(t) = \int_0^t f_Y(u)f_X(t-u)du,$$

és

$$\begin{aligned} f_Z^*(s) &= \int_0^\infty f_Z(t)e^{-st}dt = \int_0^\infty \left(\int_0^t f_Y(u)f_X(t-u)du \right) e^{-st}dt = \\ &= \int_0^\infty \int_u^\infty f_Y(u)f_X(t-u)e^{-st}dtdu. \end{aligned}$$

$v = t - u$ változócserével

$$\begin{aligned} f_Z^*(s) &= \int_0^\infty \int_u^\infty f_Y(u)f_X(t-u)e^{-st}dtdu = \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f_Y(u)f_X(v)e^{-s(v+u)}dvdu = \\ &= \int_0^\infty f_Y(u)e^{-su}du \cdot \int_0^\infty f_X(v)e^{-sv}dv = f_Y^*(S) \cdot f_X^*(S). \end{aligned}$$

Tétel.

Legyen $F(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$. Ekkor

$$F^*(s) = \frac{f^*(s)}{s}, \quad (f')^*(s) = sf^*(s).$$

(Ha F eloszlásfüggvény, akkor $F^*(s)$ minden $\operatorname{Re}(s) > 0$ -ra értelmezett.)

Biz. Parciális integrálással ($\int u'v = uv - \int uv'$):

$$\begin{aligned} F^*(s) &= \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = \\ &= \left[\left(-\frac{1}{s} \right) e^{-st} F(t) \right]_{t=0}^\infty - \int_0^\infty \left(-\frac{1}{s} \right) e^{-st} f(t) dt \\ &= 0 + \frac{1}{s} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \frac{f^*(s)}{s}. \end{aligned}$$

Ha egy eloszlást ki tudunk számítani Laplace-transzformált tartományban, akkor a végén még vissza kell transzformálnunk.

Bizonyos szép/egyszerűbb függvényekre meg lehet adni az inverz Laplace-transzformáltat analitikusan. Például az összes racionális törtfüggvényre ($\frac{p(s)}{q(s)}$, ahol p és q polinomok) ki lehet számítani parciális törtekre bontással.

Bonyolultabb függvényekre általában numerikusan invertáljuk. Ehhez ajánlom:

<http://inverselaplace.org/>

Kiszolgálási rendszerekben gyakran előfordul, hogy egy igénynek több különböző szerverhez is sorba kell állnia, mire megkapja a kívánt kiszolgálást.

Példák:

- adatcsomagok/kommunikációs igények továbbítása;
- hivatali ügyintézés;
- egy gyárban az alkatrészek megmunkálása.

Egy hálózat lehet *nyílt*, ilyenkor érkezhetnek új igények a rendszerbe, illetve igények távozhatnak is a rendszerből.

A másik lehetőség a *zárt* hálózat, ilyenkor nincsenek a rendszerből távozó és érkező igények, hanem a bent lévő igények száma állandó.

Tipikus kérdések:

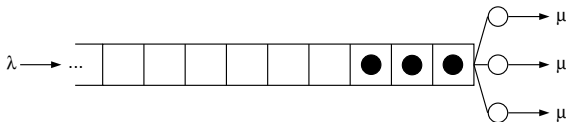
- stabilitás feltétele az egész rendszerre;
- a rendszer stacionárius állapota;
- az egyes csomóponti szerverek kihasználtsága;
- átlagos késleltetés az egyes csomópontoknál és az egész rendszerre;
- rendszerben töltött idő eloszlása.

M/M/1, M/M/c és M/M/ ∞ sor

Emlékeztető. M/M/1 sor: 1 szerver, FIFO (érkezési sorrend szerinti) kiszolgálás, végtelen buffer.



Az M/M/c sorban c szerver (kiszolgáló egység) van és végtelen buffer:



Az M/M/ ∞ sorban minden igény azonnal elkezd fix μ rátájú kiszolgálást kapni. (A gyakorlatban ez annak felel meg, amikor egy M/M/c sorban c értéke extrém nagy.)

Tétel.

- (a) Egy M/M/1 sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \lambda/\mu < 1$, és ilyenkor a stacionárius eloszlása PGEO($1 - \rho$).
- (b) Egy M/M/c sor pontosan akkor stabil, ha $\rho = \frac{\lambda}{c\mu} < 1$, és a stacionárius eloszlása

$$x_0 = \left[\sum_{k=0}^{c-1} \frac{(c\rho)^k}{k!} + \frac{(c\rho)^c}{c!(1-\rho)} \right]^{-1},$$
$$x_k = \begin{cases} x_0 \frac{(c\rho)^k}{k!} & \text{ha } 0 \leq k \leq c-1, \\ x_0 \frac{c^c \rho^k}{c!} & \text{ha } k \geq c. \end{cases}$$

- (c) Egy M/M/∞ sor mindig stabil, és a stacionárius eloszlása POI(λ/μ).

Biz.

- (a) Már volt.
- (b) Az (a)-hoz hasonlóan a dinamikus egyensúly egyenletekből adódik:

$$\lambda x_k = \mu_{k+1} x_{k+1},$$

ahol

$$\mu_k = \begin{cases} k\mu & \text{ha } k \leq c-1, \\ c\mu & \text{ha } k \geq c; \end{cases}$$

innen

$$\frac{x_{k+1}}{x_k} = \begin{cases} k\mu/\lambda & \text{ha } k \leq c-1, \\ c\mu/\lambda & \text{ha } k \geq c, \end{cases}$$

amit már csak rendezni és normálni kell.

- (c) (b) rész x_k képlete, csak most nincs $k \geq c$ eset.

Tétel. (Burke)

Tekintsünk egy $M/M/1$, $M/M/c$ vagy $M/M/\infty$ sort λ érkezési rátával, és tegyük fel, hogy a sor stabil és stacionárius.

Ekkor a sor kimenő folyamata λ paraméterű Poisson-pontfolyamat.

Megjegyzés. A kimenő folyamatban nem játszik szerepet a szerver kiszolgálási rátája. (Illetve annyiban igen, hogy a feltételek között szerepel, hogy a sor stabil.)

Biz. ($M/M/1$ sorra, vázlat.)

Laplace-transzformáltak segítségével kiszámítjuk a távozási időközök eloszlását.

Emlékeztető: a sorhossz stacionárius eloszlása $\text{PGEO}(1 - \rho) \rightarrow$ a sor ρ valószínűséggel nem üres.

Aszerint bontunk két esetre, hogy üres-e a sor:

- ρ valószínűséggel a sor nem üres, ekkor a következő távozásig $\text{EXP}(\mu)$ időt kell várni, aminek Laplace-transzformáltja $\frac{\mu}{\mu+s}$;
- $1 - \rho$ valószínűséggel a sor üres, ekkor először meg kell várni egy érkezést ($\text{EXP}(\lambda)$ idő), aztán annak a távozását ($\text{EXP}(\mu)$ idő) $\rightarrow$ a Laplace-transzformált $\frac{\lambda}{\lambda+s} \cdot \frac{\mu}{\mu+s}$.

Ez alapján a D távozási időköz Laplace-transzformáltja

$$\begin{aligned} D^*(s) &= \rho \frac{\mu}{\mu+s} + (1-\rho) \frac{\lambda}{\lambda+s} \cdot \frac{\mu}{\mu+s} = \\ &= \frac{\lambda}{\mu} \cdot \frac{\mu}{\mu+s} + \frac{\mu-\lambda}{\mu} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+s} \cdot \frac{\mu}{\mu+s} = \frac{\lambda}{\lambda+s}. \end{aligned}$$

(Távozási időközök függetlenségét nem biz.)

A következőt nevezzük nyílt Jackson-hálózatnak:

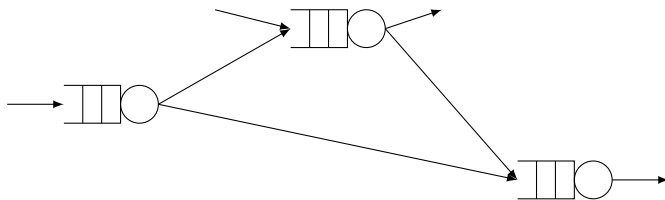
- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i -edik szerver kiszolgálási rátája μ_i ;
- az i -edik szerverhez a külső igények egy γ_i paraméterű Poisson-folyamat szerint érkeznek (a különböző szerverekhez függetlenül);
- ha az i -edik szerver kiszolgált egy igényt, az igény P_{ij} valószínűséggel beáll a j -edik szerver sorába, illetve $1 - \sum_{j=1}^m P_{ij}$ valószínűséggel távozik a rendszerből.

A P ún. *irányítási mátrix* tulajdonságai:

- $P_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j = 1, \dots, m,$
- $\sum_{j=1}^m P_{ij} \leq 1 \quad \forall i = 1, \dots, m$ -re, és legalább egy i -re $<$ áll.

Az ilyen tulajdonságú mátrixokat szubsztochasticus mátrixoknak hívjuk.

A nyílt Jackson-hálózatokon belül egy hálózat aciklikus, ha a szerverek sorba rendezhetők úgy, hogy a szerverek között mindig csak előre felé van forgalom (vagyis nincs visszacsatolás).



Ilyenkor $i > j$ -re $P_{ij} = 0$, azaz P felső-háromszög mátrix.

Emlékeztető. Poisson-folyamatokra Unió és Ritkítás tétel.

Ha valamelyik szerver érkezési folyamata egy λ_i paraméterű Poisson-folyamat, akkor a Burke-tétel szerint a kimenő folyamata is az, ami aztán a ritkítás tétel miatt (kisebb paraméterű) Poisson-folyamatokra oszlik és járul hozzá a későbbi szerverek érkezési folyamatához.

Mivel a hálózat aciklikus, ezért bármelyik szerver bemenetén független Poisson-folyamatok adódnak, így az unió tétel miatt a későbbi szerverek bemenete is Poisson-folyamat.

A külső érkezéseket is figyelembe véve az i -edik szerver bemeneti rátája

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j P_{ji}.$$

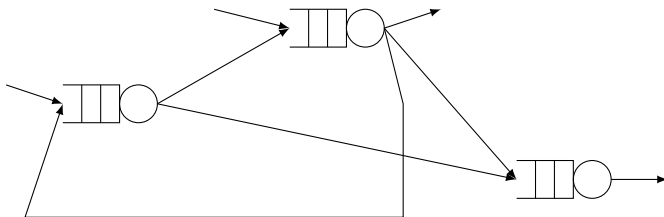
Ez a λ_i -kre egy lineáris egyenletrendszer, ami sorban előre haladva expliciten megoldható.

Tétel.

A teljes rendszer pontosan akkor stabil, ha

$$\lambda_i < \mu_i \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Olyan nyílt Jackson-hálózatokra, amikben van visszacsatolás, az egyes szerverek bemenetén található folyamatok függetlensége sérülhet.



Emiatt a bemeneteken már nem feltétlenül lesznek Poisson-folyamatok. Ezzel együtt a hosszú távú átlagos érkezési rátáról van értelme beszélni, és azzal hasonlóan lehet számolni, mint a Poisson-folyamat paraméterével.

Azt mondjuk, hogy az i -edik szerver érkezési rátája λ_i , ha hosszú T idő alatt $\lambda_i T + o(T)$ igény érkezik.

Ilyenkor a szerver kimenő rátája is λ_i , ami a P_{ij} valószínűségek szerint oszlik szét és járul hozzá a többi szerver érkezési rátájához.

Tétel. (Forgalmi egyenlet)

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^m \lambda_j P_{ji}.$$

Tétel. (Stabilitás feltétele)

Egy nyílt Jackson-hálózat pontosan akkor stabil, ha

$$\lambda_i < \mu_i \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Mátrix-vektor alakban a forgalmi egyenlet

$$\lambda(I - P) = \gamma;$$

Ha $I - P$ invertálható (ehhez elégséges, ha minden szerverből a forgalom egy része előbb-utóbb távozik a rendszerből), akkor a megoldás

$$\lambda = \gamma(I - P)^{-1}.$$

Jelölje $L_{i,j}$ azt, hogy egy igény hányszor látogatja meg a j -edik szervert a rendszerből való távozásáig, feltéve, hogy most az i -edik szerverben van.

Lemma

$$E(L_{i,j}) = [(I - P)^{-1}]_{i,j}$$

Biz. Az i -edik szerverből indulva a j -edik szerverbe való látogatások számának várható értéke teljes várható érték tétel alapján

$$E(L_{i,j}) = \delta_{i,j} + \sum_{k=1}^m P_{ik} E(L_{k,j}),$$

ami mátrix alakban írva

$$E(L) = I + P \cdot E(L),$$

aminek a megoldása éppen

$$E(L) = (I - P)^{-1}.$$

Egy Jackson-hálózat pillanatnyi állapotát a $(k_1, \dots, k_m)$ vektor írja le, ahol k_i az i -edik sorban álló igények száma. A $(k_1, \dots, k_m)$ vektorra teljesül a Markov-tulajdonság.

Ha a hálózat stabil, akkor pontosan egy stacionárius eloszlás létezik, és a hálózat bármilyen kezdeti értékből indítva a stacionárius eloszláshoz konvergál.

Tétel. (Jackson)

Ha egy stabil nyílt Jackson-hálózatban az i -edik szerver terhelése $\rho_i = \lambda_i / \mu_i < 1$, akkor a rendszer stacionárius eloszlása

$$v_{st}(k_1, \dots, k_m) = \prod_{i=1}^m \rho_i^{k_i} (1 - \rho_i).$$

Biz. (vázlat) Ellenőrizzük, hogy a megadott eloszlás teljesíti a stacionárius eloszlás definícióját.

Legyenek

- $K = (k_1, \dots, k_m)$,
- $K_{i+} = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1}, \dots, k_m)$;
- $K_{i \rightarrow j} = (k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_j + 1, \dots, k_m)$;
- $K_{i-} = (k_1, \dots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \dots, k_m)$.

Az egyes átmenetek jelentése:

- $K \rightarrow K_{i+}$: külső érkezés történt az i -edik szerverbe (ennek a rátája γ_i);
- $K \rightarrow K_{i \rightarrow j}$: kiszolgálás történt az i -edik szerverben és az igény továbbment a j -edik szerverbe (ennek a rátája $P_{ij}\mu_i$).
- $K \rightarrow K_{i-}$: kiszolgálás történt az i -edik szerverben és az igény távozott a rendszerből (ennek a rátája $(1 - \sum_j P_{ij})\mu_i$).

Az előbbi jelölésekkel a stacionárius eloszlás egyenletei

$$\sum_i \left(\sum_{j \neq i} P_{ji} \mu_j v_{\text{st}}(K_{i \rightarrow j}) + \mu_i \left(1 - \sum_j P_{ij} \right) v_{\text{st}}(K_{i+}) + \right. \\ \left. 1\{k_i > 0\} \gamma_i v_{\text{st}}(K_{i-}) + \mu_i v_{\text{st}}(K_{i+}) - v_{\text{st}}(K) \left(\gamma_i + \mu_i + \sum_{j \neq i} P_{ij} \mu_j \right) \right) = 0$$

minden lehetséges K -ra.

A fenti egyenletbe behelyettesítve $v_{\text{st}}(K) = \prod_{i=1}^m \rho_i^{k_i} (1 - \rho_i)$ -t, a szorzat alak miatt a legtöbb tényező kiemelhető minden tagból, és a visszamaradó tagok összege éppen a forgalmi egyenletet adja (0-ra rendezve).

A Jackson-tétel szerint a rendszer stacionárius eloszlása *szorzat alakú*: egybeesik azzal, mintha a sorok független, ρ_i terhelésű M/M/1 sorok lennének.

Mit lát egy beérkező igény?

Emlékeztető: a PASTA elv azt mondta ki, hogy ha egy Markov-sorban az érkezési folyamat Poisson-folyamat, akkor minden egyes beérkező igény a stacionárius sorhossz eloszlást látja.

Ez igaz nyílt Jackson-hálózatokra is.

Tétel.

Bármely igénynek bármely sorba való érkezésekor a látott (beérkezési pillanat előtti) sorhosszak együttes eloszlása a teljes hálózatban stacionárius.

Bármely igény rendszerből való távozásakor a távozás utáni pillanatban látott sorhosszak együttes eloszlása a teljes hálózatban stacionárius.

Nem biz.

Tétel. (Átlagos rendszerben töltött idő)

Ha egy igény beáll az i -edik sorba, akkor onnantól a rendszerből való távozásig szükséges idő várható értéke

$$\sum_{j=1}^m [(I - P)^{-1}]_{i,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j}.$$

Biz. Aszerint számoljuk össze, hogy melyik sorba hányszor állt be, és ott mennyi időt töltött.

M/M/c és M/M/ ∞ szerverek

Megjegyzések. Ha a hálózatban nemcsak M/M/1 szerverek vannak, hanem M/M/c vagy M/M/ ∞ szerverek is, attól még működik minden:

- a forgalmi egyenlet érvényes marad,
- a stabilitás feltétele is ugyanúgy az, hogy minden egyes sor stabil legyen,
- a hálózat stacionárius eloszlása is szorzat alakú, a megfelelő terhelésű sorok stacionárius eloszlásának szorzata,
- az átlagos rendszerben töltött idő képlete is hasonló alakú, csak az $1/(\mu_j - \lambda_j)$ helyett bonyolultabb tagokkal.

A Jackson-tételből viszont nem következik, hogy az egyes sorok érkezési folyamata független. Ha a hálózatban van visszacsatolás, akkor az egyes sorok érkezési folyamata nem független. De a stacionárius eloszlás ilyenkor is szorzat alakú.

A következőt nevezzük zárt Jackson-hálózatnak vagy Gordon–Newell-hálózatnak:

- a hálózatban m darab M/M/1 szerver van, az i -edik szerver kiszolgálási rátája μ_i ;
- ha az i -edik szerver kiszolgált egy igényt, az igény P_{ij} valószínűséggel beáll a j -edik szerver sorába.

Ezúttal feltesszük, hogy nincsenek sem érkező igények, sem távozó igények, a rendszerben lévő igények száma állandó.

Ilyenkor

$$\sum_{j=1}^m P_{ij} = 1,$$

az irányítási mátrix sztochasztikus.

Zárt Jackson-hálózatokra nem kell stabilitást vizsgálni.

A forgalmi egyenletben nincs külső érkezés:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^m P_{ji} \lambda_j.$$

Ilyenkor a megoldás csak konstans szorzó erejéig egyértelmű; a normalizálás a rendszerben keringő igények számából jön majd.

Jelölje a rendszerben lévő igények (fix) számát K .

Tétel. (Gordon–Newell)

A stacionárius eloszlás

$$v_{st}(k_1, \dots, k_m) = \prod_{j=1}^m \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j} \right)^{k_j},$$

ahol λ_i -k teljesítik a forgalmi egyenletet, és

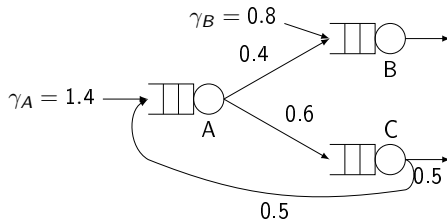
$$\sum_{\substack{(k_1, \dots, k_m): \\ k_1 + \dots + k_m = K}} \prod_{j=1}^m \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j} \right)^{k_j} = 1.$$

(Ezzel az egyenlettel a λ_i -k már egyértelműen meghatározottak.)

Biz. Ugyanúgy csak ellenőrizni kell a stacionárius eloszlás egyenleteit, mint nyílt hálózatokra.

1. feladat

Az alábbi hálózatban mindhárom szerver FIFO, a kiszolgálási rátájuk rendre $\mu_A = 2.5$, $\mu_B = 1.7$, $\mu_C = 1.5$.



- (a) Stabil-e a hálózat?
- (b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?
- (c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben?
- (d) Mi a rendszer stacionárius eloszlása?

1. feladat

(a) Stabil-e a hálózat?

Megoldás. A P irányítási mátrix a következő:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Legyen

$$\gamma = (\gamma_A \ \gamma_B \ \gamma_C) = (1.4 \ 0.8 \ 0), \quad \lambda = (\lambda_A \ \lambda_B \ \lambda_C).$$

Az egyes szerverek érkezési rátáját a forgalmi egyenletből tudjuk kiszámítani:

$$\lambda(I - P) = \gamma.$$

1. feladat

(a) A forgalmi egyenlet megoldása

$$\lambda = (2.0 \ 1.6 \ 1.2),$$

így

$$\lambda_A = 2.0 < \mu_A = 2.5,$$

$$\lambda_B = 1.6 < \mu_B = 1.7,$$

$$\lambda_C = 1.2 < \mu_C = 1.5$$

mind teljesül, a rendszer stabil.

(b) Mekkora az egyes szerverek terheltsége?

Megoldás.

$$\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 0.800,$$

$$\rho_B = \lambda_B / \mu_B = 0.941,$$

$$\rho_C = \lambda_C / \mu_C = 0.800.$$

1. feladat

- (c) Egy kívülről A-ba beérkező igény átlagosan mennyi időt tölt a rendszerben? Megoldás.

$$(I - P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1.429 & 0.571 & 0.857 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.714 & 0.286 & 1.429 \end{bmatrix},$$

és

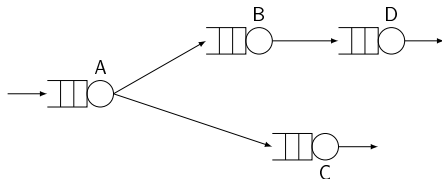
$$\sum_{j=1}^m [(I - P)^{-1}]_{1j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} = 11.43.$$

- (d) A rendszer stacionárius eloszlása

$$\begin{aligned} v_{\text{st}}(k_A, k_B, k_C) &= (1 - \rho_A) \rho_A^{k_A} (1 - \rho_B) \rho_B^{k_B} (1 - \rho_C) \rho_C^{k_C} = \\ &= 0.00235 \cdot 0.8^{k_A + k_C} \cdot 0.941^{k_B}. \end{aligned}$$

2. feladat

Az alábbi hálózatban minden szerver M/M/1 típusú, az egyes szerverek kiszolgálási rátája rendre $\mu_A = 6.0, \mu_B = 2.0, \mu_C = 4.0, \mu_D = 3.0$. A kívülről történő érkezések rátája $\gamma_A = 2.5$. Az A szerverből kimenő igények p valószínűséggel a B, $1 - p$ valószínűséggel a C szerver sorába állnak be.



- (a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?
- (b) Jellemezzük a D szerver érkezési folyamatát.
- (c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.
- (d) A p paraméter mely értékére lesz az átlagos rendszerben töltött idő minimális?

2. feladat

(a) A p paraméter mely értékeire stabil a hálózat?

Megoldás. Ez egy aciklikus hálózat, az irányítási mátrixa

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 1-p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A forgalmi egyenlet megoldható expliciten:

$$\lambda_A = \gamma_A = 2.5,$$

$$\lambda_B = p\lambda_A = 2.5p,$$

$$\lambda_C = (1-p)\lambda_A = 2.5(1-p),$$

$$\lambda_D = \lambda_B = 2.5p.$$

2. feladat

(a) A hálózat pontosan akkor stabil, ha

$$\lambda_A = 2.5 < \mu_A = 6.0,$$

$$\lambda_B = 2.5p < \mu_B = 2.0,$$

$$\lambda_C = 2.5(1 - p) < \mu_C = 4.0,$$

$$\lambda_D = 2.5p < \mu_D = 3.0$$

mindegyike fennáll, ahonnan

$$0 \leq p < 0.8$$

kell teljesülnön.

(b) Jellemezzük a D szerver érkezési folyamatát.

Megoldás. Aciklikus hálózatban ha a külső érkezési folyamatok független Poisson-pontfolyamatok, akkor az egyes szerverek érkezési folyamata is Poisson-folyamat, így a D szerver érkezési folyamata $PPP(2.5p)$.

2. feladat

- (c) Számítsuk ki egy véletlen beérkező igény átlagos rendszerben töltött idejét a p paraméter függvényében.

Megoldás.

$$(I - P)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & p & 1-p & p \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

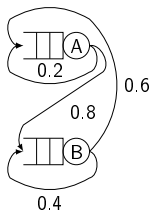
és

$$\sum_{j=1}^4 [(I - P)^{-1}]_{1,j} \frac{1}{\mu_j - \lambda_j} =$$
$$0.2857 + \frac{1-p}{4 - 2.5(1-p)} + \frac{p}{2 - 2.5p} + \frac{p}{3 - 2.5p}.$$

- (d) Az előbbi függvény a $p \in [0, 0.8)$ intervallumon a minimumát $p = 0.141$ -nél veszi fel.

3. feladat

Az alábbi zárt hálózatban két igény kering. Az A szerver M/M/1, kiszolgálási rátája $\mu_A = 1.0$, a B szerver szintén M/M/1 típusú, $\mu_B = 2.0$.



- (a) Mik a lehetséges állapotok?
- (b) Írjuk fel a teljes rendszer generátorát, és az alapján számítsuk ki a stacionárius eloszlást.
- (c) Számítsuk ki a stacionárius eloszlást a Gordon-Newell tétel alapján.
- (d) Adjuk meg az egyes szerverek terheltségét.

3. feladat

(a) Mik a lehetséges állapotok?

Megoldás. A lehetséges állapotok:

- (20): az A szerverben van mindkét igény;
- (11): az A szerverben és a B szerverben is 1 igény van;
- (02): a B szerverben van mindkét igény.

(b) A $(20) \rightarrow (11)$ átmenet rátája $1.0 \cdot 0.8$, mivel ilyen átmenet akkor történik, ha az A szerver kiszolgálja a bent lévő két igény közül az elsőt (ennek rátája 1.0), ÉS az a B szerverbe kerül át (ennek valószínűsége 0.8). Hasonlóan a többi átmenetráta:

- $(20) \rightarrow (11)$ rátája $1.0 \cdot 0.8 = 0.8$;
- $(11) \rightarrow (20)$ rátája $2.0 \cdot 0.6 = 1.2$;
- $(11) \rightarrow (02)$ rátája $1.0 \cdot 0.8 = 0.8$;
- $(20) \rightarrow (11)$ rátája $2.0 \cdot 0.6 = 1.2$.

(b) A teljes rendszer mint Markov-lánc generátora

$$Q = \begin{bmatrix} -0.8 & 0.8 & 0 \\ 1.2 & -2 & 0.8 \\ 0 & 1.2 & -1.2 \end{bmatrix}$$

az ehhez tartozó stacionárius eloszlás pedig

$$v_{\text{st}} = (0.4737 \ 0.3158 \ 0.2105).$$

3. feladat

(c) Az irányítási mátrix

$$P = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.8 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

és a forgalmi egyenlet:

$$\lambda_A = 0.2\lambda_A + 0.6\lambda_B$$

$$\lambda_B = 0.8\lambda_A + 0.4\lambda_B,$$

ahonnan

$$\lambda_A = 3c, \quad \lambda_B = 4c$$

valamely $c > 0$ konstanssal.

3. feladat

(c) A Gordon–Newell tétel szerint c értékét onnan kapjuk, hogy

$$\sum_{\substack{(k_1, \dots, k_m) : \\ k_1 + \dots + k_m = K}} \prod_{j=1}^m \left(\frac{\lambda_j}{\mu_j} \right)^{k_j} = 1,$$

ami itt

$$\left(\frac{3c}{1.0} \right)^2 + \left(\frac{3c}{1.0} \right) \left(\frac{4c}{2.0} \right) + \left(\frac{4c}{2.0} \right)^2 = 1,$$

ahonnan $c = 0.2294$, és így

$$\lambda_A = 3c = 0.6882, \quad \lambda_B = 4c = 0.9177.$$

3. feladat

(c) A stacionárius eloszlás a Gordon–Newell tételből számolva

$$v_{\text{st}}(2, 0) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A} \right)^2 = 0.4737,$$

$$v_{\text{st}}(1, 1) = \left(\frac{\lambda_A}{\mu_A} \right) \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B} \right) = 0.3158,$$

$$v_{\text{st}}(0, 2) = \left(\frac{\lambda_B}{\mu_B} \right)^2 = 0.2105,$$

ami valóban megegyezik a generátorból számolt stacionárius eloszlással.

(d) Az egyes szerverek terhelése (kihasználtsága)

$$\rho_A = \lambda_A / \mu_A = 0.6882 / 1.0 = 0.6882,$$

$$\rho_B = \lambda_B / \mu_B = 0.4588 / 1.0 = 0.4588.$$