SORBANÁLLÁSOS RENDSZEREK

Budapesti Műszaki Egyetem

Híradástechnikai Tanszék

Jereb László, Telek Miklós

Tartalomjegyzék

1. fejezet

BEVEZETÉS

1.1. A sokfelhasználós hírközlés motivációi

1. Információ továbbítási szempontok
   - bárkit, bármikor (késleltetés és korlátozás nélkül), bárhogy
   - minőség, megbízhatóság (*kapcsolat lehetőség, létrehozás, fenntartás)*
   - **de olcsón**
2. Problémák
   - növekvő számú felhasználó $\longrightarrow$ növekvő információ mennyiség
   - az igények véletlenszerűen keletkeznek (nagy dinamika, nem stacionárius)
   - egyre nagyobb távolságban $\longrightarrow$ műszaki és forgalmi konfliktusok
   - egyre többféle igény (beszéd, adat, ...; pont-pont, multipont-multipont)
   - **növekvő társadalmi függőség!**
3. Kommunikációs hálózatok szükségessége
   - nyilvánvalóan nem lehetséges az igények pontpáronkénti kielégítése, mivel kis kihasználtságú (drága), bonyolult felhasználói pontok (műszakilag kivihetetlen), korlátozottak az erőforrások,
   - speciális gazdaságos rendszer, hálózat szükséges, amely egységes hozzáférést biztosít a felhasználók számára, koncentrálja az egyedi (kis) felhasználói forgalmakat, nagy kihasználtságú hálózati erőforrásokat biztosít
     $\longrightarrow$ **megosztott erőforrások, többfelhasználós megoldások**

Funkció	Vezérlés	Kapcs. mód	Név	Altípus	Alk. ter.
Alaptechnológiák			FDMA		
			TDMA		
			CDMA		
			FDM		
			TDM		
Hozzáférési sémák	Centralizált	Áramkör-	EAMPS		Cellás
		kapcsolt	GSM		telefon
			IS-95		
		Csomag-	Polling és		Vezetékes
		kapcsolt	próbálkozás		LAN
			Helyfoglal.	FPODA	Satellite
				PDAMA	
	Elosztott	Csomag-	Polling és		Vezetékes
		kapcsolt	próbálkozás		LAN
			CSMA	CSMA/CD	
				CSMA/CA	Vezetéknélk.
			BTMA	MACA	LAN
				MACAW	
			Token ring	FDDI	Vez. LAN
			ALOHA	Egysz.	Satellite
			ALOHA	S-ALOHA	
			ALOHA	R-ALOHA	

1.1. táblázat: Többszörös hozzáférési megoldások osztályozása

1.2. Tömegkiszolgálási modellek helye

1.2.1. Speciális hálózati funkciók és tömegkiszolgálási problémáik

1. Többszörös hozzáférés (multiple access)

   - funkció: közös erőforrás(ok) igénybevételének szervezése kettő vagy több felhasználó számára
   - osztályozás: ld. 1.1. táblázat

	Összeköttetésmentes	Összeköttetés-orientált
Csomagkapcsolás	internet router	ATM kapcsoló
Áramkörkapcsolás		Távbeszélő központ

1.2. táblázat: Kapcsolóelemek osztályozása

2. Kapcsolás (switching)
   - funkció: eljárás (folyamat), amelynek révén egy hálózati elem (kapcsoló) az egyik bemenetére érkező adatot az egyik (adott) kimenetére juttatja
   - osztályozás:
3. Ütemezés (scheduling)
   - funkció: választási lehetőség esetén a sorra kerülő igény kiválasztása
   - elvi lehetőségek:
     - munkamegőrzés, nem munkamegőrzés
     - kiszolgálási elv: FIFO (first come first out), FCFS (first come first serve), LIFO (last come first out), LCFS (last come first serve), RO (random order), RR (round robin), (PR) prioritásos PS (processor sharing)
     - sorrrendezési korrektség (fairness)
     - ütemezési korlátok: idő, sávszélesség, késleltetés ingadozás
4. Azonosítás és címzés (naming & addressing)
   - funkció: célfelhasználó azonosítása, útvonal megtalálás támogatása
   - *tömegkiszolgálási szerepe kisebb*
5. Útvonalválasztás (routing)
   - funkció: útvonal megtalálása
   - osztályozás:
     - hierarchikus, nem hierarchikus
     - fix, dinamikus, adaptív
     - korlátok: szakasszám, távolság
   - *tömegkiszolgálási szerepe nagyon jelentős lehet*

6. Hibajavítás (error control)
    - funkció: hibafelismerés és javítás nem ideális
    - sokféle megoldás
    - *tömegkiszolgálási szerepe indirekt: pluszinformáció árán - ismétléscsökkentés*
7. Flow control (flow control)
    - funkció: forrás csomagküldési sebességének hálózathoz igazodása
    - sokféle megoldás (TCP, ATM)
    - *tömegkiszolgálási szerepe indirekt: "forráslassítás" árán - hálózaton belüli vagy végponti konfliktus csökkentés*
8. Forgalom menedzsment (traffic management)
    - funkció: hálózati tevékenység a hatékonyság növelésére
    - CAC, árképzés (pricing), erőforrás allokáció, ütemezés, jelzés, uni-, multicast, "szerződés-módosítás" (renegotiation), stb.

1.2.2. Hálózati funkciókhoz kapcsolódó tömegkiszolgálási problémák

1. szükséges erőforrás (csatornakapacitás, kapcsolóméret, puffer, stb.) mennyiségének meghatározása, minimalizálása
2. felhasználók számának meghatározása, maximalizálása
3. teljesítményjellemzők (torlódás, késleltetés, stabilitás, korrektség) meghatározása (elkerülése, feloldása, minimalizálása:

Megjegyzés: a három szempont kapcsolata!

1.1. ábra : Sorbanállási rendszer, mint fekete doboz

1.3. Sorbanállási rendszerek jellemzése

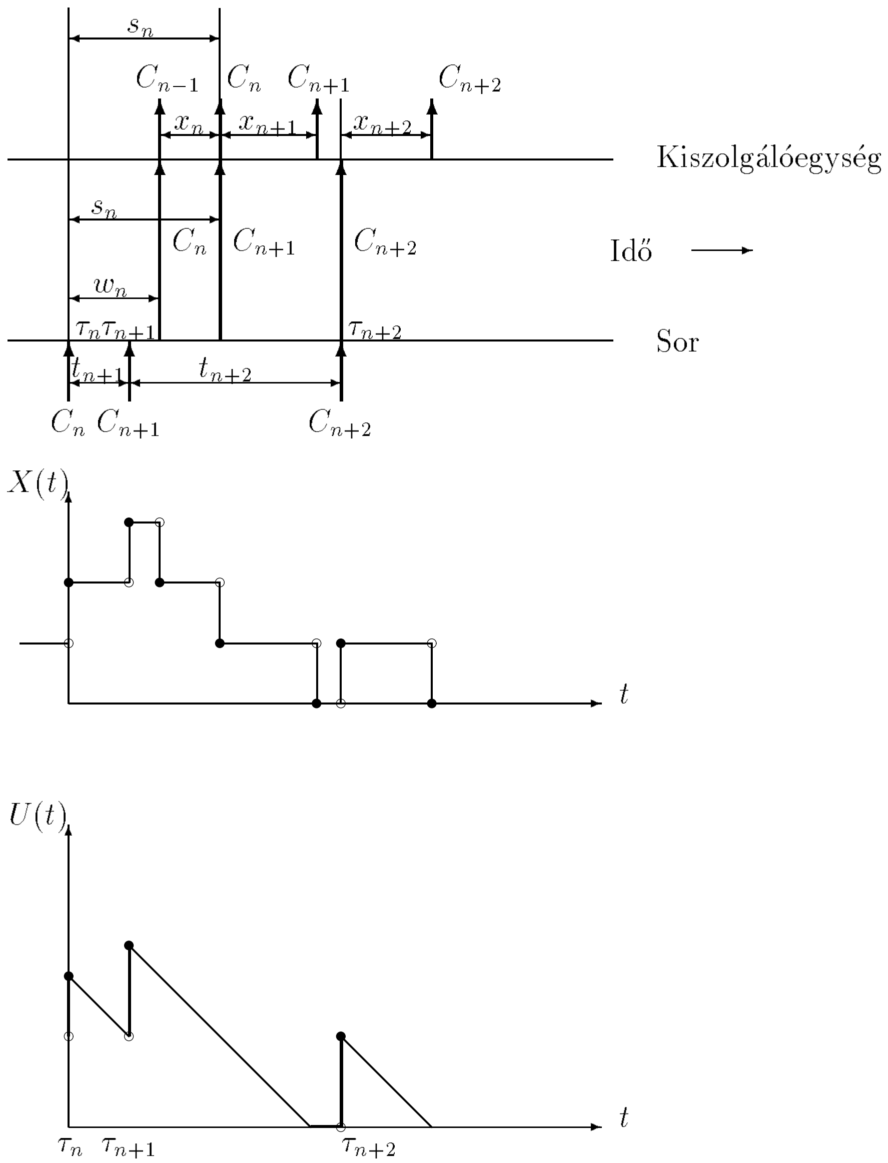
1.3.1. Sorbanállási rendszer, mint fekete doboz

1. Sorbanállási rendszer, mint fekete doboz: C_n: az n. igény (ld. 1.1. ábra)

2. Formalizált felírás, egyetlen sorra, de általánosítható is: (ld. 1.2. ábra)

1.3.2. Az igények érkezési folyamata

1. τ_n: az n. igény érkezési időpontja (véletlen változó – v.v.)
2. $t_n = \tau_n - \tau_{n-1}$: az n. igény érkezési időköz – véletlen változó – v.v.
3. $A_n(t) = P(t_n < t)$: az n. érkezési időköz eloszlása, átlaga $\bar{a_n}$
4. $\alpha(t)$: az érkezések száma a $(0, t)$ intervallumban – v.v.
5. átlagos érkezési ráta a $(0, t)$ intervallumban: $\lambda_t = \dfrac{\alpha(t)}{t}$ – v.v.
6. pillanatnyi érkezési ráta: *a realizációnkénti jellemzők várható értéke*
$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{E}\Big(\tfrac{\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)}{\Delta t}\Big)$$
7. speciális eset: $\lambda(t) = \lambda$, $\forall\ t$-re, ekkor $\lim_{t\to\infty} \lambda_t = \lambda$ is teljesül



1.2. ábra : Egycsatornás tömegkiszolgálási rendszer részletes idődiagramjának egy realizációja

1.3.3. Az igények távozási folyamata

1. x_n: az n. igény kiszolgálási ideje – v.v.
2. $B_n(x) = P(x_n < x)$: az n. kiszolgálási idő eloszlása, $\bar{b_n}$, $\bar{x_n}$
3. w_n: az n. igény várakozási ideje – v.v. $\bar{w_n}$
4. $s_n = w_n + x_n$: az n. igény rendszerben eltöltött ideje – v.v., $\bar{s_n}$
5. $\delta(t)$: a távozások száma a $(0, t)$ intervallumban – v.v.
6. átlagos távozási ráta: $S_t = \dfrac{\delta(t)}{t}$ – v.v.
7. pillanatnyi távozási ráta: *a realizációnkénti jellemzők várható értéke*

$$S(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{E}\left(\tfrac{\delta(t+\Delta t)-\delta(t)}{\Delta t}\right)$$

8. speciális eset: $S(t) = S$, $\forall$ t-re, ekkor $\lim\limits_{t\to\infty} S_t = S$ is teljesül

1.3.4. Tranziens és egyensúlyi kiszolgálási rendszer jellemzők

1. $X(t)$: a rendszerbeli igények száma a t időpontban – v.v.
   $X = \lim_{t\to\infty} X(t)$: rendszerbeli igények száma – v.v.
2. $X_w(t)$: a várakozó igények száma a t időpontban – v.v.
   $X_w = \lim_{t\to\infty} X_w(t)$: várakozó igények száma – v.v.
3. $X_s(t)$: a kiszolgálás alatti igények száma a t időpontban – v.v.
   $X_s = \lim_{t\to\infty} X_s(t)$: kiszolgálás alatti igények száma – v.v.
4. $U(t)$: a munkahátrálék a t időpontban – v.v.
   $U = \lim_{t\to\infty} U(t)$: munkahátrálék – v.v.

1.4. Alapösszefüggések

1.4.1. Input és output jellemzők

1. Stabil sorbanállási rendszerre, ha léteznek a $p_i = \lim_{t\to\infty} \mathbf{P}(X(t) = i)$, $\forall i$ egyensúlyi állapotvalószínűségek, továbbá teljesül, hogy
   - a pillanatnyi érkezési ráta:
     $\lambda(t,i) = \lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{E}\Big(\frac{\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)}{\Delta t} \mid X(t) = i\Big) = \lambda(i)$, $\forall t, i$-re és
   - a pillanatnyi kiszolgálási ráta:
     $\mu(t,i) = \lim_{\Delta t\to 0} \mathbf{E}\Big(\frac{\delta(t+\Delta t)-\delta(t)}{\Delta t} \mid X(t) = i\Big) = \mu(i)$, $\forall t, i$-re

2. akkor egyensúlyi állapotban
   - a várható érkezési ráta:
     $$\lambda = \bar{\lambda} = \lim_{t\to\infty} \lambda_t = \sum_i \lambda_i p_i \tag{1.1}$$
   - a várható távozási ráta:
     $$S = \bar{S} = \lim_{t\to\infty} S_t = \sum_i \mu_i p_i \tag{1.2}$$

3. alkalmazás M/M/1 rendszerre:
   - a várható érkezési ráta: $\lambda = \sum_i \lambda_i p_i = \lambda_a$, mivel $\lambda_i = \lambda_a$, $\forall i$
   - a várható távozási ráta: $S = \sum_i \mu_i p_i = \mu(1 - p_0)$, mivel $\mu_i = \mu$, $\forall i > 0$

1.4.2. Folyamegyensúly

1. Veszteségmentes, stabil sorbanállási rendszerre, ha létezik $\bar{\lambda} = \lim_{t\to\infty} \lambda_t$ és $\bar{S} = \lim_{t\to\infty} S_t$, akkor teljesül az alábbi folyamegyensúly (flow-balance):
   $$\bar{S} = \bar{\lambda} \tag{1.3}$$

2. alkalmazás M/M/1 rendszerre:
   - $S = \mu(1 - p_0) = \lambda = \lambda_a$, ahonnan $p_0 = 1 - \lambda_a/\mu$

1.4.3. Little formula

1. Veszteségmentes, munkamegőrző (work-conservative), rendszerre, ha létezik $\bar{\lambda} = \lim_{t\to\infty} \lambda_t$ és $\bar{T} = \lim_{t\to\infty} T_t$, (ahol T_t az igények által a rendszerben eltöltött átlagos idő a $(0,t)$ intervallumban), akkor

$$\bar{X} = \bar{\lambda}\bar{T} \tag{1.4}$$

2. bizonyítás: (Kleinrock)

   - $\alpha(t)$: az érkezések száma a $(0,t)$ intervallumban (ld. előbb)
   - $\delta(t)$: a távozások száma a $(0,t)$ intervallumban (ld. előbb)
   - ha $X(0) = 0$, akkor $X(t) = \alpha(t) - \delta(t)$
   - $\lambda_t = \dfrac{\alpha(t)}{t}$: az átlagos érkezési intenzitás a $(0,t)$ intervallumban (ld. előbb)
   - $\gamma(t)$: az $\alpha(t)$ és $\delta(t)$ görbék közötti terület nagysága a $(0,t)$ intervallumban (*az igények által a rendszerben eltöltött összidő*) – v.v.
   - T_t: egy realizáció igényei által a rendszerben eltöltött átlagos idő a $(0,t)$ intervallumban – v.v.

   $$T_t = \frac{\gamma(t)}{\alpha(t)}$$

   - X_t: egy realizáció során a rendszerben tartózkodó igények átlagos száma a $(0,t)$ intervallumban – v.v.

   $$X_t = \frac{\gamma(t)}{t} = \frac{T_t\ \alpha(t)}{t} = \frac{T_t\ \lambda_t\ t}{t} = \lambda_t\ T_t$$

   amiből a kiinduló feltételekkel a formula következik.

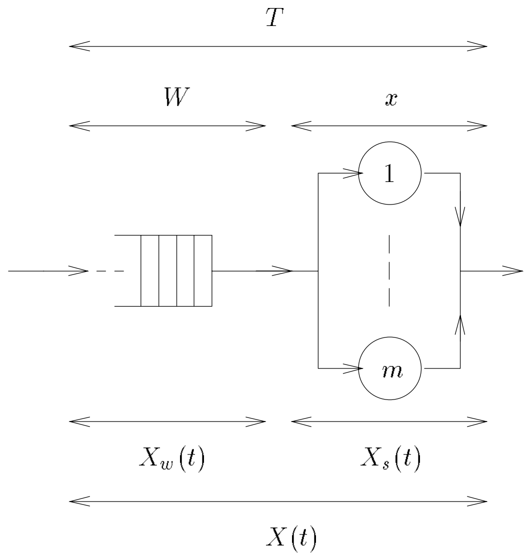
3. alkalmazás részrendszerre:

   - kiszolgáló egységre:

   $$\bar{X_s} = \bar{\lambda}\ \bar{x} \tag{1.5}$$

   - várakozási sorra (puffer):

   $$\bar{X_w} = \bar{\lambda}\ \bar{W} \tag{1.6}$$



1.5. Teljesítmény jellemzők meghatározása

1.5.1. Teljesítmény jellemzők értelmezése

1. felhasználói szempontból

- átvitel (throughput):
  - $\delta(t)$: a távozások száma a $(0, t)$ intervallumban – v.v.
  - átlagos távozási ráta a $(0, t)$ intervallumban: $S_t = \dfrac{\delta(t)}{t}$ – v.v.
  - pillanatnyi távozási ráta *a realizációnkénti jellemzők várható értéke*: $S(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \mathbf{E}\left(\frac{\delta(t+\Delta t)-\delta(t)}{\Delta t}\right)$
  - speciális eset: $S(t) = S$, $\forall\ t$, ekkor $\lim_{t\to\infty} S_t = S$ is teljesül
- rendszerben eltöltött idő (sojourn time): s_n (eloszlás, momemtumok, várható érték)
- igényvesztés valószínűsége:
  $\mathbf{P}$(az igény nem kap kiszolgálást feltéve, hogy igény érkezik)
- kiszolgálás korrektsége: átvitel, válaszidő, blokkolási valószínűség igénytípustól, konkrét igénytől való függetlensége (fairness)

2. szolgáltatói szempontból

   - kihasználtság (ld. ergodicitás): egy kiszolgáló esetén: $\rho = \mathbf{P}(\text{a kiszolgáló egység foglalt})$, több kiszolgáló esetén a kiszolgálónkénti kihasználtságok átlaga.
   - rendszerbeli, várakozó sorban álló, kiszolgálás alatti igények száma (eloszlás, momemtumok): $X(t), X_w(t), X_s(t), \cdots$

3. szempontok ellentmondása (feloldás: drága, de legalábbis bonyolító)

   - az "átlagra méretezett", ezért nagykihasználtságú, egyszerű kiszolgálási elvű hálózat lenne a legolcsóbb
   - a felhasználók számára gyors válaszidejű, kisveszteségű, azaz túl-("csúcsterhelésre") méretezett hálózat lenne ideális
   - a veszteség csökkenthető nagyobb sorok (puffer) alkalmazásával, de ez növeli az átlagos válaszidőt is
   - az egyes felhasználók szeretnék, ha ők előnyt élveznének, de ehhez bonyolult kiszolgálási elvű és számlázási rendszerű szolgáltatás szükséges

1.5.2. Teljesítmény jellemzők származtatása

1. kihasználtság:

   - egy kiszolgálóegység (csatorna) esetén

$$\rho = \mathbf{P}(X > 0) = 1 - p_0 = \bar{X}_s = \bar{\lambda}\ \bar{x} \tag{1.7}$$

   - több (c) kiszolgálóegység (csatorna) esetén

$$\rho = \frac{\bar{X}_s}{c} = \frac{\bar{\lambda}\ (\sum\limits_{k=0}^{c-1} k\ p_k + \sum\limits_{k=c}^{\infty} c\ p_k)}{c} = \frac{\bar{\lambda}\ \bar{x}}{c} \tag{1.8}$$

2. igényvesztési valószínűség: *c kapacitású rendszer esetén*

$$p_v = \mathbf{P}(\text{az igény elveszik} \mid \text{igény érkezik}) = \frac{\mathbf{E}(\text{elvesző igények száma})}{\mathbf{E}(\text{érkező igények száma})}$$

$$p_v = \frac{\sum\limits_{k=0}^{c} p_k\ \mathbf{E}(\text{elvesző igények várható száma} \mid k \text{ igény van a rendszerben})}{\sum\limits_{k=0}^{c} p_k\ \mathbf{E}(\text{érkező igények várható száma} \mid k \text{ igény van a rendszerben})} \tag{1.9}$$

3. Poisson érkezés ($\lambda(t,i) = \lambda$, $\forall t, i$) esetén

$$p_v = \frac{\lambda \ p_c}{\lambda \sum\limits_{k=0}^{c} p_k} = \frac{\lambda \ p_c}{\lambda} = p_c \tag{1.10}$$

4. veszteséges rendszerre:

   - a folyamegyensúly:

   $$\bar{S} = (1 - p_v)\bar{\lambda} \tag{1.11}$$

   - a Little formula:

   $$\bar{X} = (1 - p_v) \ \bar{\lambda} \ \bar{T} \tag{1.12}$$

1.6. A tárgy feladatának pontosítása

1. Modellezési és analízis kérdések
   a tárgy keretében csak azok egy kis része

   - a vizsgálható sztochasztikus folyamatok köre
   - a modell származtatása a rendszer paramétereiből
   - a teljesítményjellemzők származtatása a modellből

2. Fontos a kétféle szempont megfigyelése, felismerése

   - felhasználói oldal:
     - kommunikációs protokoll jellemzők: működési, kiszolgálási elvek *(pl. prioritás)*, bonyolultság – *(pl. szinkronizáció)*, lehetséges kiszolgálási konfliktusok (pl. veszteség, késleltetés) és feloldásuk, korrektség
     - igény kielégítési jellemzők: rendszerben eltöltött (kiszolgálási, várakozási) idő (eloszlása), sikertelen kiszolgálás (kezdeményezés, megszakadás) valószinűsége
   - szolgáltatói oldal:
     - igényforrások jellemzői: számuk, homogenitás – inhomogenitás
     - igények jellemzői: keletkezési időpont (folytonos vagy diszkrét), generálási időköz eloszlása (momemtum - várható érték), nagyság (erőforrás pl. sávszélesség- vagy időigény, csoportméret)
     - erőforrások kihasználtsága: költség - bevétel

2. fejezet

MATEMATIKAI ALAPOK

2.1. Valószínűségszámítási összefoglaló

2.1.1. Ismertnek feltételezett fogalmak

1. Valószínűségszámítás

   - folytonos, diszkrét eloszlású véletlen változó (v. v.)
   - folytonos, diszkrét eloszlású v. v. momemtumai, várható értéke
   - feltételes eloszlás, feltételes várható érték, függetlenség
   - valószínűségi változók összegének várható értéke, eloszlása, konvolúció

2. Sztochasztikus folyamatok

   - sztochasztikus folyamat:
     Legyen: $\{X(t_i), i = 1, 2, \cdots, n\}$, $x_i \in S$, $t_i \in T$, egy véletlen folyamat és jelölje $\mathbf{P}(A)$ az A esemény bekövetkezésének valószínűségét. Ekkor

     $$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{t}) = \mathbf{P}(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \cdots, X(t_n) \leq x_n) \tag{2.1}$$

     véges dimenziós eloszlásokkal lehet a sztochasztikus folyamatot egyértelműen megadni.
   - T paramétertér *(diszkrét, folytonos)*
   - S mintatér – állapot *(diszkrét, folytonos)*

3. Sztochasztikus folyamatok néhány tulajdonsága kapcsolatban

   - stacionárius: eltolásinvariáns
     - erősen
       $$F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{t}) = F_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x};\boldsymbol{t}+\boldsymbol{\Delta t})$$
     - gyengén ($n \leq 2$) — pl. $n = 1$
       $$p_i(t) = \mathbf{P}(X(t) = x_i) = p_i, \forall t, x_i \in S$$
   - ergodikus: stacionárius folyamatra, ahol $X(t) = X$, $\forall t$
     "az időátlag megegyezik a sokasági átlaggal"
     $$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X(t)) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} X(t)dt$$

   Általában feltesszük, hogy teljesülnek. Ha valamelyik nem teljesül, azt külön hangsúlyozzuk.

2.1.2. Néhány nevezetes eloszlás

1. nevezetes diszkrét eloszlások:

   - determinisztikus eloszlás: $\eta =$ valamely v. v.

     $\mathbf{P}(\eta = a) = 1,\;\; a < \infty$ tetszés szerinti egész vagy valós szám
   - geometriai eloszlás:
     $p =$ esemény bekövetkezésének valószínűsége egy adott kísérletben
     $\eta =$ az esemény az n. független kísérlet során következett be
     $\mathbf{P}(\eta = n) = (1-p)^{n-1}p,\;\; n > 0$
     $\mathbf{P}(\eta > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p = (1-p)^n p\sum_{j=0}^{\infty}(1-p)^j = (1-p)^n$

     A geometriai eloszlás örökifjúságának megmutatása:
     $$\mathbf{P}(\eta = k+\Delta k \mid \eta > k) = \frac{\mathbf{P}(\eta = k+\Delta k, \eta > k)}{\mathbf{P}(\eta > k)} =$$
     $$\frac{\mathbf{P}(\eta = k+\Delta k)}{\mathbf{P}(\eta > k)} = \frac{(1-p)^{k+\Delta k-1}p}{(1-p)^k} = (1-p)^{\Delta k-1}p$$

- Bernoulli eloszlás: η = egy "Bernoulli kísérletben" egy esemény bekövetkezésének száma

  $\mathbf{P}(\eta = 1) = p, \quad \mathbf{P}(\eta = 0) = 1 - p, \quad \mathbf{P}(\eta > 1) = 0$

- binomiális eloszlás:
  η_n = n független kísérletből bekövetkezett események száma

$$\mathbf{P}(\eta_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

- Poisson eloszlás: binomiális eloszlásból
  $\eta = \lim\limits_{n\to\infty} \eta_n$ = n független kísérletből bekövetkezett események száma

$$\mathbf{P}(\eta = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

2. nevezetes folytonos eloszlások:

- egyenletes eloszlás: $f(t) = \dfrac{1}{b-a}$
- exponenciális eloszlás: η = egy esemény első bekövetkezésének időpontja,

$$\mathbf{P}(\eta \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad \mathbf{P}(\eta > t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$$

  Az exponenciális eloszlás örökifjúságának megmutatása:

$$\mathbf{P}(\eta > t + \Delta t \mid \eta > t) = \frac{\mathbf{P}(\eta > t + \Delta t, \eta > t)}{\mathbf{P}(\eta > t)} = \frac{\mathbf{P}(\eta > t + \Delta t)}{\mathbf{P}(\eta > t)} =$$

$$\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+\Delta t)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}} = \mathrm{e}^{-\lambda \Delta t}$$

2.1.3. Valószínűségi változók minimuma, maximuma

1. valószínűségi változók minimumának eloszlása:

- legyen adott n valószínűségi változó, τ_i, $i = 1, ..., n$
- az egyes változók eloszlásfüggvénye: $F_i(t) = \mathbf{P}(\tau_i < t)$, $i = 1, ..., n)$
- $\tau = min_i\ \tau_i, i = 1, ..., n$

- kérdés: $F_{min}(t) = \mathbf{P}(\tau \ < \ t)$
- megoldás: $F_{min}(t) = \mathbf{P}(\tau \ < \ t) = \mathbf{P}(min_i \ \tau_i \ < \ t) =$

  $$1 - \mathbf{P}(min_i \ \tau_i \ \geq \ t) = 1 - \mathbf{P}(\tau_i \ \geq \ t, \forall i)$$

  Ha a τ_i valószínűségi változók mindegyike független egymástól:

  (*Nem túl szigorú feltétel, mivel csak az első eseményig kell teljesülnie*)

  $$F_{min}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\tau_i \ \geq \ t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - \mathbf{P}(\tau_i \ < \ t) = 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - F_i(t))$$

  amiből
  $$1 - F_{min}(t) = \prod_{i=1}^{n}(1 - F_i(t))$$

  Ha τ_i ($F_i(t) = \mathbf{P}(\tau_i \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda_i t}$, $i = 1, \cdots, n$) exponenciális eloszlású, akkor $F_{min}(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} \mathrm{e}^{-\lambda_i t} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ is exponenciális, $\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$ paraméterrel

  Ha τ_i ($P_i(k) = \mathbf{P}(\tau_i = k) = (1-p_i)^{k-1}p_i$, $i = 1, \cdots, n$) geometriai eloszlású, akkor $F_{min}(k) = \mathbf{P}(\tau \leq k) = 1 - (\prod_{i=1}^{n}(1 - p_i))^k = 1 - (1 - p)^k$ is geometriai, és

  $$1 - p = \prod_{i=1}^{n}(1 - p_i)$$

2. valószínűségi változók maximumának eloszlása:

   - hasonló lépésekkel: függetlenséget feltételezve

   $$F_{max}(t) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(\tau_i \ \leq \ t) = \prod_{i=1}^{n} F_i(t) \tag{2.2}$$

(*A függetlenség sokkal szigorúbb feltétel, mint a minimumnál, mivel ekkor annak az utolsó eseményig kell teljesülnie!*)

2.1.4. z-transzformáció

Ha $\exists\ a > 0$, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f_n}{a^n} = 0$, és $|z| < 1$, akkor létezik az f_n sorozat

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

z-transzformáltja.

1. A z-transzformáció néhány tulajdonsága:
   - Sorösszeg: $F(1) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f_n$
   - Kezdetiérték-tétel: $F(0) = f_0$
   - Határérték-tétel: $\lim\limits_{z\to 0}(1-z)F(z) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$
   - Középérték-tétel: $\dfrac{1}{k!}\dfrac{d^k}{dz^k}F(z)\Big|_{z=0} = f_k$
   - Konvolúciós tétel: $h_n = f_n \otimes g_n = \sum_{k=0}^{n} f_k g_{n-k} \longrightarrow H(z) \ = \ F(z)\ G(z)$
2. z-transzformáció alkalmazása (generátorfüggvény) diszkrét eloszlásokra
   - Adott a η valószínűségi változó, $p_k = \mathbf{P}(\eta = k)$, $k = 0, 1, 2, \cdots$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k = 1$ eloszlás.
   - $P(z) = E(z^\eta) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} p_k z^k$
   - Előzőkből: $P(1) = 1$, $P(0) = p_0$, $\dfrac{1}{k!}\dfrac{d^k}{dz^k}P(z)\Big|_{z=0} = p_k$
   - Várható érték: $P'(z)|_{z=1} = \dfrac{d}{dz}P(z)\Big|_{z=1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k p_k = \mathbf{E}(\eta)$
   - Magasabb momemtumok meghatározásához: $P''(z)|_{z=1} = \dfrac{d^2}{dz^2}P(z)\Big|_{z=1} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k(k-1)p_k = \sum\limits_{k=0}^{\infty} k^2 p_k - \sum\limits_{k=0}^{\infty} k p_k = \mathbf{E}(\eta^2) - \mathbf{E}(\eta)$
   - Konvolúciós tétel (eloszlásra): $h_n = f_n \otimes g_n \longrightarrow H(z) \ = \ F(z)\ G(z)$

3. példák a z-transzformáció (generátorfüggvény) alkalmazására

   - determinisztikus eloszlás (diszkrét értékre):
     - $P(z) = z^n$, $\mathbf{E}(\eta) = n$
   - geometriai eloszlás:
     - $P(z) = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}pz^k = pz\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}z^{k-1} = \frac{pz}{1-(1-p)z}$
     - $\mathbf{E}(\eta) = \left.\frac{p(1-(1-p)z)+pz(1-p)}{(1-(1-p)z)^2}\right|_{z=1} = \frac{p^2+p-p^2}{p^2} = \frac{1}{p}$
   - Bernoulli eloszlás:

     $P(z) = 1-p+pz, \quad \mathbf{E}(\eta) = p$
   - binomiális eloszlás:
     - $P(z) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}z^k = (1-p+pz)^n$,

       lásd. n db. Bernoulli eloszlású v.v. összege
     - $\mathbf{E}(\eta) = np(1-p+pz)^{n-1}\Big|_{z=1} = np$
   - Poisson eloszlás:

     $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}z^k = \mathrm{e}^{(z-1)\lambda t}, \quad \mathbf{E}(\eta) = \lambda t\mathrm{e}^{(z-1)\lambda t}\Big|_{z=1} = \lambda t$

2.1.5. Laplace-transzformáció

1. definició:
   Laplace transzformáció:

$$f^*(s) = \int_{0^-}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}f(t)dt$$

   Laplace-Stieltjes transzformáció:

$$f^\sim(s) = \int_{0^-}^{\infty}\mathrm{e}^{-st}df(t)$$

   következmény:

$$f^\sim(s) = s\ f^*(s)$$

2. a Laplace-transzformáció néhány tulajdonsága:

   - Integráltulajdonság: $f^*(0) = \int_{0-}^{\infty} f(t)dt$
   - Kezdetiérték-tétel: $\lim_{s\to\infty} s f^*(s) = \lim_{t\to 0} f(t)$
   - Határérték-tétel: $\lim_{s\to 0} s f^*(s) = \lim_{t\to\infty} f(t)$, ha $s\ f^*(s)$ analitikus $Re(s) \geq 0$ esetén
   - Konvoluciós tétel: $h(t) = f(t) \otimes g(t) = \int_{u=0-}^{t} f(u)g(t-u)du$ $\longrightarrow h^*(s) = h^*(s)\ h^*(s)$
   - $\dfrac{df(t)}{dt} \to s\ f^*(s) - f(0+);\qquad \int_{0-}^{t} f(u)du \to \dfrac{1}{s} f^*(s) + c$

3. Laplace transzformáció alkalmazása nemnegatív folytonos valószínűségi változók eloszlására (karakterisztikus függvény)

   - Adott az $\eta \geq 0$ nemnegatív valószínűségi változó, ahol $f(t)$, η sűrűségfüggvénye, $F(t)$, η eloszlásfüggvénye, ekkor $f(t)$ Laplace transzformáltja:

   $$f^*(s) = E(e^{-s\eta}) = \int_{0-}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} f(t)dt = \int_{0-}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} dF(t) = F^{\sim}(s)$$

   - Várható érték: $\left.\dfrac{d}{ds} f^*(s)\right|_{s=0} = -\mathbf{E}(\eta)$
   - Magasabb momemtumok előállítása: $\left.\dfrac{d^k}{ds^k} f^*(s)\right|_{s=0} = (-1)^k \mathbf{E}\Big(\eta^k\Big)$
   - Konvolúciós tétel (sűrűségfüggvényekre): $h(t) = f(t) \otimes g(t)$ $\longrightarrow h^*(s) = f^*(s)\ g^*(s)$

4. példák a Laplace transzformáció alkalmazására

   - determinisztikus eloszlás ($a > 0$ valós értékre):

   $$f^*(s) = F^{\sim}(s) = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} dF(t) = \mathrm{e}^{-sa}, \quad \mathbf{E}(\eta) = a$$

   - egyenletes eloszlás:

   $$f^*(s) = \int_{a}^{b} \mathrm{e}^{-st} \frac{1}{b-a} dt = \frac{1}{s(b-a)} (\mathrm{e}^{-sa} - \mathrm{e}^{-sb}), \quad \mathbf{E}(\eta) = \frac{a+b}{2}$$

   - exponenciális eloszlás:

   $$f^*(s) = \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-st} \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} dt = \frac{\lambda}{s+\lambda}, \quad \mathbf{E}(\eta) = \left.\frac{\lambda}{(s+\lambda)^2}\right|_{s=0} = \frac{1}{\lambda}$$

2.2. Diszkrét idejű Markov láncok összefoglalása

2.2.1. Markov tulajdonság

"A jelen magába foglalja a teljes múltat"

$$\mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_0 = x_0) = \mathbf{P}(X_n = x_n \mid X_{n-1} = x_{n-1}). \tag{2.3}$$

2.2.2. Diszkrét idejű Markov lánc

$X_0, X_1, X_2, \ldots X_n \in S$ diszkrét valószínűségi változó sorozat diszkrét idejű Markov lánc, ha minden $n \geq 1$-re teljesül a Markov tulajdonság.

1. állapottér: az S halmazt a Markov lánc állapotterének nevezzük.
2. időtengely: mérnöki alkalmazások során általában azt feltételezzük, hogy az X_n valószínűségi változók az időtengenly T_n ($T_n \geq T_{n-1}$) időpontjában írják le a vizsgált rendszer viselkedését.
3. állapot: ha $X_n = s \in S$, akkor azt mondjuk, hogy a vizsgált rendszer az n-edik időpontban az s állapotban tartózkodik.

2.2.3. Markov tulajdonság következményei

1. következmény diszkrét idejű Markov láncokra:

$$P^{(n)} = P^{(n-1)}\mathbf{\Pi}^{(1)}(n-1) = P^{(0)}\mathbf{\Pi}^{(n)}(0) \tag{2.4}$$

   ahol:

   - (tranziens) állapotvalószínűség vektor:

     $$P^{(n)} = \left[p_0^{(n)}, p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, \cdots\right], \quad p_i^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = i),$$

   - k-lépéses átmenetvalószínűség mátrix:

     $$\mathbf{\Pi}^{(k)}(m) = \left[p_{ij}^{(k)}(m)\right], \quad p_{ij}^{(k)}(m) = \mathbf{P}(X_{m+k} = j \mid X_m = i),$$

     $\forall\ i, j \in S,\ m = 0, 1, 2, \cdots,\ k = 1, 2, \cdots.$

   - Chapman-Kolmogorov egyenlőség:

     $$p_{ij}^{(k+n)}(m) = \sum_{l \in S} p_{il}^{(k)}(m) p_{lj}^{(n)}(m+k); \quad \mathbf{\Pi}^{(k+n)}(m) = \mathbf{\Pi}^{(k)}(m)\mathbf{\Pi}^{(n)}(m+k) \tag{2.5}$$

2. homogén Markov lánc (stacionárius átmenetvalószínűségek):

$$\mathbf{\Pi}^{(1)}(m) = [p_{ij}] = \mathbf{\Pi}$$

$\forall\ i, j \in S,\ \forall m = 0, 1, \cdots$-ra. Ekkor

$$\mathbf{\Pi}^{(k+n)}(m) = \mathbf{\Pi}^{(k+n)} = \mathbf{\Pi}^{(k)}\mathbf{\Pi}^{(n)}, \text{ és } P^{(n)} = P^{(0)}\mathbf{\Pi}^{n} \tag{2.6}$$

3. a diszkrét idejű Markov láncokkal kapcsolatban tanult alapfogalmak

   - irreducibilitás: minden állapot minden állapotból elérhető (*szemrevételezés*)
     $\forall i, j$ esetén $\quad \exists n < \infty$, hogy $p_{ij}^{(n)} > 0$
   - aperiodikusság: nem periodikus (*szemrevételezés*)
     i állapot aperiodikus, ha $\exists n_0 < \infty$, hogy $p_{ii}^{(n)} > 0 \ \ \forall n \geq n_0$ esetén.
   - visszatérőség: pozitív (*véges várható visszatérési idő*)
     definició: lásd Györfi. Valószínűségszámítás, Sztochasztikus folyamatok

     $$f_{ij}^{(n)} = \mathbf{P}(X_n = j, X_k \neq j, 1 \leq k < n \mid X_0 = i), \quad (n > 0,\ i, j \in S)$$

     – $i \in S$ visszatérő, ha: $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = 1$
     – $i \in S$ nem visszatérő, ha: $\sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)} < 1$
     – $i \in S$ pozitív visszatérő, ha: $m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)} < \infty$
   - öröklődés: irreducibilis Markov láncokra az aperiodikusság, a visszatérőség öröklődik

2.2.4. Stabilitás

1. stabilitás

   - a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = i)$ határérték létezik minden $\forall i \in S$-re.
   - a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = i)$ határérték független a kezdeti eloszlástól.
   - a $\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = i)$ határérték eloszlást ad S-en, azaz

     $$\sum_{i \in S} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = i) = 1.$$

2. tételek a stabilitásról (*az egyik legalapvetőbb kérdés*)

   - véges Markov láncra: ha irreducibilis és aperiodikus
   - végtelen Markov láncra: ha irreducibilis, aperiodikus és pozitív visszatérő
   - stabilitás elégséges feltétele végtelen irreducibilis, aperiodikus Markov láncra a *Foster kritérium*
     Az irreducibilis, aperiodikus Markov lánc stabil, ha léteznek az $I \geq 0,\ C > 0,\ d > 0$ számok, úgy hogy

     $k \leq I$-re: $\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = k) \leq C$

     $k > I$-re: $\mathbf{E}(X_{n+1} \mid X_n = k) \leq k - d$

3. a stabilitás következménye

   - $\lim\limits_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} = p_j > 0,\ \forall i, j$, ahol $p_j = \lim\limits_{n\to\infty} \mathbf{P}(X_n = j),\ \forall j$-re
   - ekkor a $P = P\mathbf{\Pi},\ P = [p_0, p_1, p_2, \cdots]$ egyenlőségnek a $\sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i = 1$ feltétel mellett csak egy megoldása van, amely a határeloszlás.
     Ha a $P^{(0)} = P$ feltétel teljesül, akkor $P^{(n)} = P,\ \ \forall n$-re.

Mindig véges állapottérről (N) lesz szó, hacsak külön nem hangsúlyozzuk a végtelent

2.3. Diszkrét idejű Markov láncok jellemzőinek meghatározása

2.3.1. Határeloszlás

1. Az egyenletek felírása a j. állapotra: (*a kifejezés interpretálása !*)

$$p_j^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} p_i^{(n-1)} p_{ij} = p_j^{(n-1)} p_{jj} + \sum_{i\neq j} p_i^{(n-1)} p_{ij} =$$

$$p_j^{(n-1)}(1 - \sum_{k\neq j} p_{jk}) + \sum_{i\neq j} p_i^{(n-1)} p_{ij}$$

ahonnan

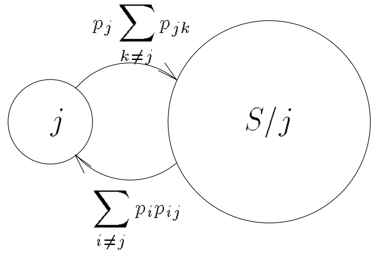
$$p_j^{(n)} - p_j^{(n-1)} = \sum_{i\neq j} p_i^{(n-1)} p_{ij} - p_j^{(n-1)} \sum_{k\neq j} p_{jk} \tag{2.7}$$

A határeloszlásra, mivel $\lim\limits_{n\to\infty} p_j^{(n)} = \lim\limits_{n\to\infty} p_j^{(n-1)} = p_j, \quad \forall j$-re

$$p_j - p_j = 0 = \sum_{i\neq j} p_i p_{ij} - p_j \sum_{k\neq j} p_{jk}$$

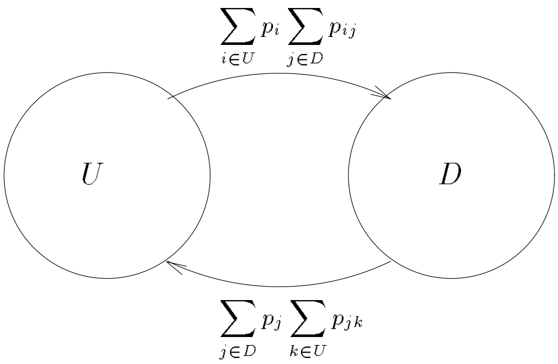
azaz (*a kifejezés interpretálása, grafikus demonstráció !*)

$$\sum_{i\neq j} p_i p_{ij} = p_j \sum_{k\neq j} p_{jk} \tag{2.8}$$



2. A kifejezés kiterjeszthető állapotcsoportokra is

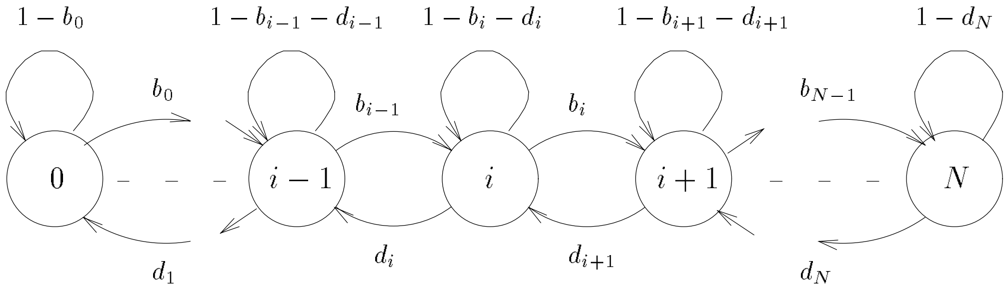
$$\sum_{i\in U} p_i \sum_{j\in D} p_{ij} = \sum_{j\in D} p_j \sum_{k\in U} p_{jk} \tag{2.9}$$



2.3.2. Bolyongások

1. Értelmezés

$$p_{ij} = \begin{cases} b_i & j = i+1,\ 0 \leq i < N \\ d_i & j = i-1,\ 0 < i \leq n \\ 1 - b_i - d_i & j = i,\ 0 < i < N \\ 1 - b_0 & j = i,\ i = 0 \\ 1 - d_N & j = i,\ i = N \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



2. Bolyongások határeloszlása

$$p_{k-1}p_{k-1,k} + p_{k+1}p_{k+1,k} = p_k(p_{k,k-1} + p_{k,k+1}),\ 0 < k \le N$$
$$p_{k-1}b_{k-1} + p_{k+1}d_{k+1} = p_k(b_k + d_k),\quad 0 < k \le N$$
$$p_1 d_1 = p_0 b_0$$

amiből

$$p_k d_k = p_{k-1}b_{k-1},\quad 0 < k \le N \tag{2.10}$$

Így

$$p_k = \frac{b_{k-1}}{d_k}p_{k-1} = p_0 \prod_{j=1}^{k} \frac{b_{j-1}}{d_j},\quad 0 < k \le N \tag{2.11}$$

Mivel $\sum_{k\in S} p_k = 1$

$$\sum_{k\in S} p_k = p_0 + p_0 \sum_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{k} \frac{b_{j-1}}{d_j} = 1$$

s innen

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{k} \frac{b_{j-1}}{d_j}} \tag{2.12}$$

3. demonstrációs példa: b, d =const. eset, Foster kritérium alkalmazás végtelen esetre

2.3.3. Tartásidő eloszlás, következő állapot

1. Állapotok tartásidő eloszlása

   - tekintsünk egy tetszés szerinti állapotot, amelyre $p_{ii} < 1$:
   - a markovitásból következően annak valószínűsége, hogy a rendszer az állapotot éppen az n. lépésben hagyja el:

   $$\mathbf{P}(\tau_i = n) = p_{ii}^{n-1}(1 - p_{ii}) \tag{2.13}$$

   geometriai eloszlású, amiből

   $$E(\tau_i) = \frac{1}{1 - p_{ii}} = \frac{1}{\sum_{j \neq i} p_{ij}} \tag{2.14}$$

   Emlékezzünk: a geometriai eloszlás emlékezetmentes!

2. Az i állapotot követő állapot eloszlása

   - tekintsük az előző i állapotot
   - annak valószínűsége, hogy a rendszer az állapotot az n. lépésben hagyja el és a j állapotba lép át

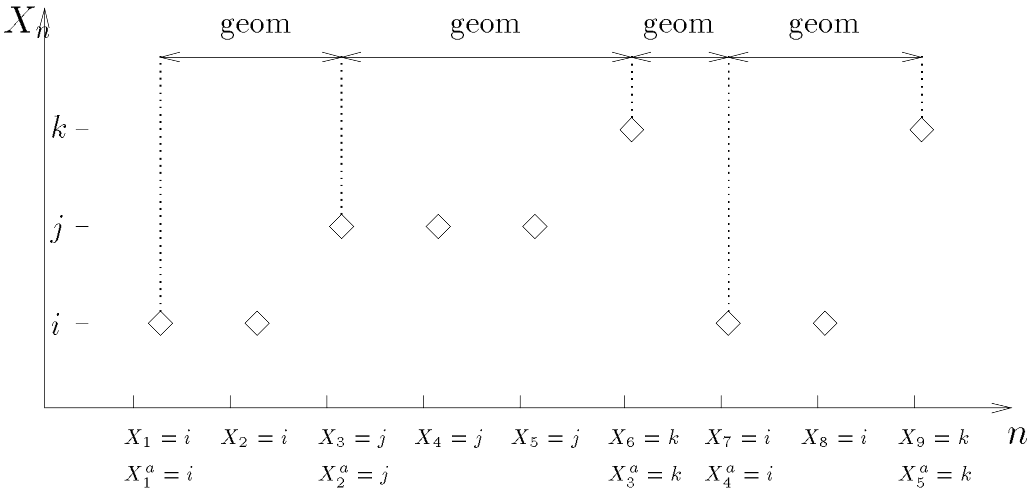
   $$\mathbf{P}(X_n = j \mid X_n \neq i,\ X_k = i,\ k < n) =$$

   $$\frac{\mathbf{P}(X_n = j, X_n \neq i,\ X_k = i,\ k < n)}{\mathbf{P}(X_n \neq i,\ X_k = i,\ k < n)} = \frac{\mathbf{P}(X_n = j,\ X_k = i,\ k < n)}{\mathbf{P}(X_n \neq i,\ X_k = i,\ k < n)} =$$

   $$\frac{p_{ii}^{n-1} p_{ij}}{p_{ii}^{n-1}(1 - p_{ii})} = \frac{p_{ij}}{\sum_{k \neq i} p_{ik}} \tag{2.15}$$

   Vegyük észre: a következő állapot csak az aktuális állapottól függ, s független az átlépés időpontjától is — Markovitás!

3. Markov lánc az állapotváltozások időpontjában



- tekintsük az állapotváltozások időpontjában a folyamatot X_n^a
- jelöljük $\mathbf{\Pi}^a$-val ennek egylépéses átmenetvalószínűség mátrixát
- a $\mathbf{\Pi}^a$ mátrix elemei származtathatók az eredeti mátrixból (ld. 2.15)

$$p_{ij}^a = \frac{p_{ij}}{\sum_{k \neq i} p_{ik}}, \quad p_{ii}^a = 0, \quad \forall i\text{-re}$$

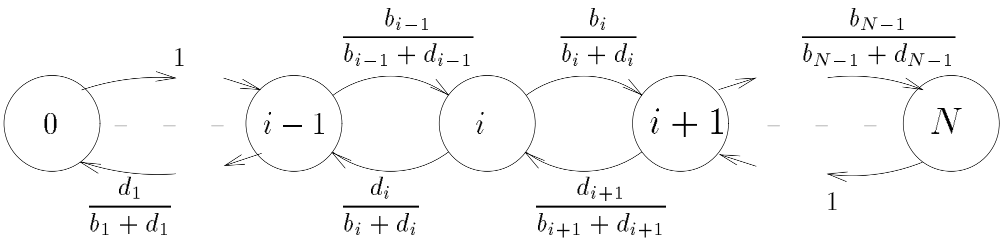
- a $\mathbf{\Pi}^a$ mátrix segítségével előállíthatók az állapotváltási időpontokra a $P_i^{a\ (n)}$ tranziens és a p_i^a egyensúlyi állapotvalószínűségek
- p_i és p_i^a kapcsolata:

$$p_i = \frac{p_i^a\ \mathbf{E}(\tau_i)}{\sum_{j \in S}\ p_j^a\ \mathbf{E}(\tau_j)} \tag{2.16}$$

ahol $\mathbf{E}(\tau_i) = \dfrac{1}{\sum_{j \neq i} p_{ij}}$

- Példa: véges állapotterű bolyongás,

$$p_{ij}^a = \begin{cases} b_i/(b_i + d_i) & j = i+1,\ 0 < i < N \\ d_i/(b_i + d_i) & j = i-1,\ 0 < i < n \\ 0 & j = i,\ 0 \leq i \leq N \\ 1 & i = 0,\ j = 1 \\ 1 & i = N,\ j = N-1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



Ezért $p_1^a = \dfrac{b_1+d_1}{d_1} p_0^a$ és

$$p_k^a = \frac{b_{k-1}(b_k+d_k)}{d_k(b_{k-1}+d_{k-1})} p_{k-1} = \frac{b_k+d_k}{d_1} p_0 \prod_{j=2}^{k} \frac{b_{j-1}}{d_j}, \quad 1 < k \leq N$$

ahonnan

$$p_0^a = \frac{1}{1+(b_1+d_1)/d_1 + \sum_{k=2}^{N}((b_k+d_k)/d_1)\prod_{j=2}^{k}(b_{j-1}/d_j)}$$

s ekkor 2.16-ból

$$p_k = \frac{(1/d_1)\prod_{j=2}^{k}(b_{j-1}/d_j)}{1/b_0 + 1/d_1 + (1/d_1)\sum_{k=2}^{N}\prod_{j=2}^{k}(b_{j-1}/d_j)} = \frac{\prod_{j=1}^{k}(b_{j-1}/d_j)}{1+\sum_{k=1}^{N}\prod_{j=1}^{k}(b_{j-1}/d_j)}$$

és

$$p_0 = \frac{1/b_0}{1/b_0 + 1/d_1 + (1/d_1)\sum_{k=2}^{N}\prod_{j=2}^{k}(b_{j-1}/d_j)} = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N}\prod_{j=1}^{k}(b_{j-1}/d_j)}$$

ami összhangban van a korábbi eredménnyel.

2.3.4. Tranziens eloszlás

1. A z-transzformált alkalmazása tranziens eloszlás előállítására

$$P^{(n)} = P^{(n-1)}\mathbf{\Pi}$$

Legyen

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{(n)} z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} P^{(n)} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} P^{(n-1)}\mathbf{\Pi} z^n$$

$$P(z) - P^{(0)} = z\sum_{n=1}^{\infty} P^{(n-1)}\mathbf{\Pi} z^{n-1} = zP(z)\mathbf{\Pi}$$

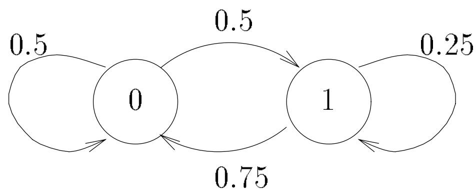
$$P(z) = P^{(0)}\left[\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{\Pi}\right]^{-1} \tag{2.17}$$

$$\lim_{n\to\infty} P^{(n)} = \lim_{z\to 1} P^{(0)}(1-z)\left[\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{\Pi}\right]^{-1} = P^{(0)}\lim_{z\to 1}(1-z)\left[\boldsymbol{I} - z\boldsymbol{\Pi}\right]^{-1}$$

(*Határeloszlás létezésének feltétele a kifejezés alapján*)

2. Kétállapotú példa a tranziens és egyensúlyi eloszlás eloszlás előállítására

$$\boldsymbol{\Pi} = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} .5 & .5 \\ .75 & .25 \end{bmatrix}$$



- határeloszlás meghatározása

$$p_0 = 0.5p_0 + 0.75p_1 \quad p_1 = 0.5p_0 + 0.25p_1 \quad p_0 + p_1 = 1$$

$$2p_0 = 3p_1 \quad \longrightarrow \quad p_0 = 0.6, \;\; p_1 = 0.4$$

- tranziens eloszlás

$$\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}z = \begin{bmatrix} 1-0.5z & -0.5z \\ -0.75z & 1-0.25z \end{bmatrix}$$

$$det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}z) = (1-z)(1+0.25z)$$

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}z)^{-1} = \frac{1}{(1-z)(1+0.25z)}\begin{bmatrix} 1-0.25z & 0.5z \\ 0.75z & 1-0.5z \end{bmatrix}$$

$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}z)^{-1}$ sorfejtése:

$$\frac{\boldsymbol{A}}{1-z} + \frac{\boldsymbol{B}}{1+0.25z}$$

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}z)^{-1} = \frac{1}{1-z}\begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} + \frac{1}{1+0.25z}\begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 \\ -0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{\Pi}z)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-z}{4}\right)^n \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 \\ -0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$$

Mivel bevezethető a következő értelmezés:

$$P(z) = P^{(0)} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{\Pi}^{(n)} z^n = P^{(0)} \mathbf{\Pi}(z)$$

$$\mathbf{\Pi}^{(n)} = \mathbf{\Pi}^n = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix} + (\frac{-1}{4})^n \begin{bmatrix} 0.4 & -0.4 \\ -0.6 & 0.6 \end{bmatrix}$$

$$P_0^{(n)} = 0.6 + \left(\frac{-1}{4}\right)^n \left(0.4P_0^{(0)} - 0.6P_1^{(0)}\right)$$

$$P_1^{(n)} = 0.4 + \left(\frac{-1}{4}\right)^n \left(-0.4P_0^{(0)} + 0.6P_1^{(0)}\right)$$

2.4. Folytonos idejű Markov láncok

Az $X(t)$ folyamatot folytonos idejű Markov láncnak nevezzük, ha $\forall n \geq 1$-re, $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_n$-re és $x_0, x_1, \cdots, x_n \in S$-re teljesül a

$$\mathbf{P}(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}, \ldots, X(t_0) = x_0) = \mathbf{P}(X(t_n) = x_n | X(t_{n-1}) = x_{n-1}). \tag{2.18}$$

összefüggés, amennyiben a feltételes valószínűségek léteznek.

Figyelmeztetés: Nem igazi matematikai tárgyalás, hanem csak a diszkrét idejű Markov láncokkal való kapcsolatok jelzése; részletesen ld. Györfi, Páli

2.4.1. Markov tulajdonság

1. a Markov tulajdonság következménye folytonos idejű Markov láncokra:

$$P(t+u) = P(t)\mathbf{\Pi}(t,u) \tag{2.19}$$

ahol:

$$P(t) = [p_0(t), p_1(t), p_2(t), \cdots], \quad p_i(t) = \mathbf{P}(X(t) = i),$$

$$\mathbf{\Pi}(t,u) = [p_{ij}(t,u)], \quad p_{ij}(t,u) = \mathbf{P}(X(t+u) = j \mid X(t) = i),$$

$\forall\ i,\ j \in S, \forall t, u \geq 0$

Chapman-Kolmogorov egyenlőség:

$$p_{ij}(t, u+v) = \sum_{l \in S} p_{il}(t,u) p_{lj}(t+u, v); \quad \mathbf{\Pi}(t, u+v) = \mathbf{\Pi}(t,u)\mathbf{\Pi}(t+u, v) \tag{2.20}$$

2. homogén Markov lánc (stacionárius átmenetvalószínűség):

$$\mathbf{\Pi}(t, u+v) = \mathbf{\Pi}(u+v) = \mathbf{\Pi}(u)\mathbf{\Pi}(v); \quad p_{ij}(u) = \mathbf{P}(X(t+u) = j \mid X(t) = i),$$

$$\mathbf{\Pi}(u) = [p_{ij}(u)], \quad \forall\, i,\ j \in S, \forall t, u \geq 0$$

3. más felírással kifejtve a j. állapotra:

$$P_j(t+u) = \sum_{i=0}^{n} P_i(t)p_{ij}(u) = P_j(t)p_{jj}(u) + \sum_{i \neq j} P_i(t)p_{ij}(u)$$

Taylor sorba fejtve $p_{ij}(u)$-t:

$$P_j(t+u) - P_j(t) = \sum_{i \neq j} P_i(t)p_{ij}(u) - P_j(t)\sum_{k \neq j} p_{jk}(u) =$$

$$\sum_{i \neq j} P_i(t)\, q_{ij}\, u - P_j(t)\sum_{k \neq j} q_{jk}\, u + o(u),$$

ahol a $\boldsymbol{Q}$ rátamátrix általános alakja homogén Markov láncra:
$q_{ij} = \lim_{u \to 0} \dfrac{p_{ij}(u) - \delta_{ij}}{u}, \quad \boldsymbol{Q} = [q_{ij}], \quad \sum_{j \in S} q_{ij} = 0, \forall i \in S.$

Az előzőekből:

$$\frac{d}{dt}P_j(t) = \lim_{u \to 0} \frac{P_j(t+u) - P_j(t)}{u} = \sum_{i \neq j} P_i(t)q_{ij} - P_j(t)\sum_{k \neq j} q_{jk} \qquad (2.21)$$

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)\boldsymbol{Q} \qquad (2.22)$$

A továbbiakban $\forall i$-re feltesszük, hogy teljesül $q_{ii} > -\infty$ — fizikai tartalom.

2.4.2. Folytonos idejű Markov láncok tulajdonságai

1. irreducibilitás: minden állapot minden állapotból elérhető
   (*szemrevételezés*)
   $\forall i, j$ esetén $\exists t < \infty$, hogy $p_{ij}(t) > 0$

2. visszatérőség: pozitív (*véges várható visszatérési idő*)
   a diszkrét visszatérési idő folytonos általánosításával

3. öröklődés: irreducibilis Markov láncokra a visszatérőség öröklődik

2.4.3. Stabilitás

1. a határeloszlás létezése

   - véges Markov láncra: ha irreducibilis
   - végtelen Markov láncra: ha irreducibilis és pozitív visszatérő
   - stabilitás elégséges feltétele végtelen Markov láncokra — Foster kritérium alkalmazása: ld. később

   A továbbiakban feltesszük, hogy minden állapotban 0-nál több időt tölt a rendszer, és mindig véges állapottérről (N) lesz szó, hacsak külön nem hangsúlyozzuk a végtelent

2. a határeloszlás létezésének következménye

   - $\lim_{t\to\infty} p_{ij}(t) = p_j > 0, \ \forall i, j \in S$, ahol $p_j = \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(X(t) = j)$
   - ekkor a $P\boldsymbol{Q} = 0, \ P = [p_0, p_1, p_2, \cdots]$ egyenlőségnek a $\sum_{i\in S} p_i = 1$ feltétel mellett csak egy megoldása van, amely a határeloszlást szolgáltatja.
     Ha a $P(0) = P$ feltétel teljesül, akkor $P(t) = P, \quad \forall t$-re.

2.5. Folytonos idejű Markov láncok jellemzőinek meghatározása

2.5.1. Határeloszlás

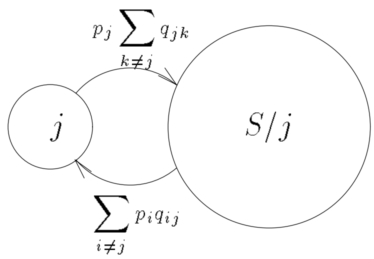
1. Az egyenletek felírása a j. állapotra:

$$\lim_{t\to\infty} P_j(t+u) = \lim_{t\to\infty} P_j(t) = p_j, \quad \forall j \in S$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d}{dt} P_j(t) = 0 = \sum_{i\neq j} p_i q_{ij} - p_j \sum_{k\neq j} q_{jk}$$

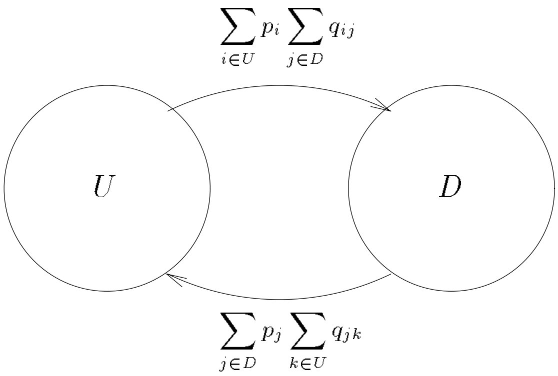
azaz

$$\sum_{i\neq j} p_i q_{ij} = p_j \sum_{k\neq j} q_{jk} \tag{2.23}$$



2. a kifejezés kiterjeszthető állapotcsoportokra is

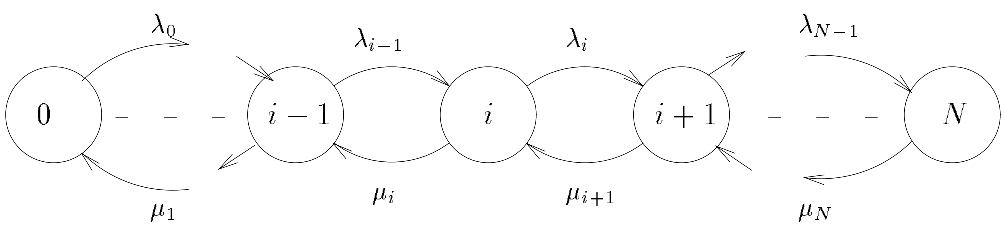
$$\sum_{i \in U} p_i \sum_{j \in D} q_{ij} = \sum_{j \in D} p_j \sum_{k \in U} q_{jk} \tag{2.24}$$



2.5.2. Születési-halálozási folyamatok

1. értelmezés:

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda_i & j = i+1, \ \ 0 \leq i < N \\ \mu_i & j = i-1, \ \ 0 < i \leq N \\ -\lambda_i - \mu_i & j = i, \ \ 0 < i < N \\ -\lambda_0 & j = i, \ \ i = 0 \\ -\mu_N & j = i, \ \ i = N \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



2. születési-halálozási folyamatok határeloszlása

$$p_{k-1}q_{k-1,k} + p_{k+1}q_{k+1,k} = p_k(q_{k,k-1} + q_{k,k+1}),\ 0 < i \leq N$$

$$p_{k-1}\lambda_{k-1} + p_{k+1}\mu_{k+1} = p_k(\lambda_k + \mu_k), \quad 0 < i \leq N$$

$$p_1\mu_1 = p_0\lambda_0$$

amiből

$$p_k\mu_k = p_{k-1}\lambda_{k-1}, \quad 0 < i \leq N \tag{2.25}$$

Így

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1}}{\mu_k}p_{k-1} = p_0 \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}, \quad 0 < i \leq N \tag{2.26}$$

Mivel $\sum_{k\in S} p_k = 1$

$$\sum_{k\in S} p_k = p_0 + p_0 \sum_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j} = 1$$

s innen

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^{N} \prod_{j=1}^{k} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}} \tag{2.27}$$

3. demonstrációs példa: M/M/1 rendszer (*típus megfogalmazása nélkül*)

2.5.3. Tartásidő eloszlás, következő állapot

1. állapotok tartásidő eloszlása

   - tekintsünk egy tetszés szerinti állapotot, amelyre $q_{ii} < 0$:
   - a markovitásból következően az i állapot elhagyási idejét a következő differenciál egyenlet írja le:

$$\frac{d}{dt}P_i(t) = q_{ii}P_i(t), \quad P_i(0) = 1$$

amiből:

$$P_i(t) = \mathbf{P}(\tau_i > t) = \mathrm{e}^{q_{ii}t} \tag{2.28}$$

és

$$E(\tau_i) = \frac{1}{-q_{ii}} = \frac{1}{\sum_{j\neq i} q_{ij}} \tag{2.29}$$

mivel

$$F_{\tau_i}(t) = \mathbf{P}(\tau_i \leq t) = 1 - \mathrm{e}^{q_{ii}t} = 1 - \mathrm{e}^{-\sum_{j\neq i} q_{ij} t}$$

Emlékezzünk: Az exponenciális eloszlás emlékezetmentes!

2. az i állapotot követő állapot eloszlása

   - tekintsük az előző i állapotot
   - annak valószínűsége, hogy a rendszer az i. állapotot a $(t, t+\Delta t)$ intervallumban hagyja el és ekkor a j állapotba lép át

$$\mathbf{P}(X(t+\Delta t) = j \mid X(t+\Delta t) \neq i,\ X(u) = i,\ \forall 0 \leq u \leq t) =$$
$$\frac{\mathbf{P}(X(t+\Delta t) = j,\ X(t+\Delta t) \neq i,\ X(u) = i,\ \forall 0 \leq u \leq t)}{\mathbf{P}(X(t+\Delta t) \neq i,\ X(u) = i,\ \forall 0 \leq t \leq t)} =$$
$$\frac{\mathbf{P}(X(t+\Delta t) = j,\ X(u) = i,\ \forall 0 \leq u \leq t)}{\mathbf{P}(X(t+\Delta t) \neq i,\ X(u) = i,\ \forall 0 \leq u \leq t)}$$
$$\frac{\mathbf{P}(X(t+\Delta t) = j,\ X(t) = i)}{\mathbf{P}(X(t+\Delta t) \neq i,\ X(t) = i)}$$

   ahonnan:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{P}(X(t+\Delta t) = j \mid X(t+\Delta t) \neq i,\ X(u) = i,\ \forall 0 \leq u \leq< t) =$$
$$\frac{q_{ij}\,\Delta t\, \mathrm{e}^{q_{ii}t} + o(\Delta t)}{\sum_{k\neq i} q_{ik}\,\Delta t\, \mathrm{e}^{q_{ii}t} + o(\Delta t)} = \frac{q_{ij}}{\sum_{k\neq i} q_{ik}} \tag{2.30}$$

   Vegyük észre: a következő állapot csak az aktuális állapottól függ, s független az átlépés időpontjától is — Markovitás!

3. Markov lánc az állapotváltozások időpontjában (beágyazott Markov lánc)

   - tekintsük az állapotváltozások időpontjában a folyamatot X_n^a
     Figyelem: diszkrét idejű Markov lánc
   - jelöljük $\mathbf{\Pi}^a$-val ennek egylépéses átmenetvalószínűség mátrixát
   - a $\mathbf{\Pi}^a$ mátrix elemei származtathatók az eredeti mátrixból (ld. 2.30)

$$p_{ij}^a = \frac{q_{ij}}{\sum_{k\neq i} q_{ik}}, \quad p_{ii}^a = 0, \quad \forall i\text{-re}$$

   - a $\mathbf{\Pi}^a$ mátrix segítségével előállíthatók az állapotváltási időpontokra a $P_i^a(n)$ tranziens és a p_i^a egyensúlyi állapotvalószínűségek

- p_i és p_i^a kapcsolata:

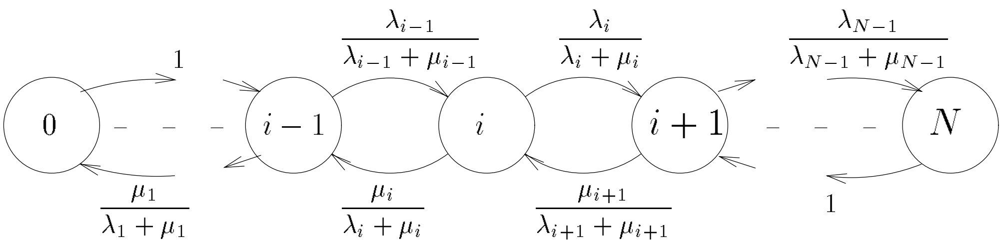
$$p_i = \frac{p_i^a \ \mathbf{E}(\tau_i)}{\sum_{j\in S} \ p_j^a \ \mathbf{E}(\tau_j)} \tag{2.31}$$

ahol $\mathbf{E}(\tau_i) = \dfrac{1}{\sum_{j\neq i} q_{ij}} = \dfrac{1}{-q_{ii}}$

Vegyük észre: a Foster kritérium alkalmazható az állapotváltások pillanatába "beágyazott Markov láncra", s ezzel a stabilitás elégséges kritériuma ellenőrizhető!

- példa: véges állapotterű bolyongás, (grafikus demonstráció)

$$p_{ij}^a = \begin{cases} \lambda_i/(\lambda_i+\mu_i) & j=i+1,\ 0<i<N \\ \mu_i/(\lambda_i+\mu_i) & j=i-1,\ 0<i<N \\ 0 & j=i,\ 0\leq i\leq N \\ 1 & i=0,\ j=1 \\ 1 & i=N,\ j=N-1 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



Ezért $p_1^a = \dfrac{\lambda_1+\mu_1}{\mu_1} p_0^a$ és

$$p_k^a = \frac{\lambda_{k-1}(\lambda_k+\mu_k)}{\mu_k(\lambda_{k-1}+\mu_{k-1})} p_{k-1} = \frac{\lambda_k+\mu_k}{\mu_1} p_0 \prod_{j=2}^{k} \frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}, \quad 1<k\leq N$$

ahonnan

$$p_0^a = \frac{1}{1+(\lambda_1+\mu_1)/\mu_1 + \sum_{k=2}^{N}((\lambda_k+\mu_k)/\mu_1)\prod_{j=2}^{k}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}}$$

s ekkor 2.31-ből

$$p_k = \frac{(1/\mu_1)\prod_{j=2}^{k}(\lambda_{j-1}/\mu_j)}{1/\lambda_0 + 1/\mu_1 + (1/\mu_1)\sum_{k=2}^{N}\prod_{j=2}^{k}\frac{\lambda_{j-1}}{\mu_j}} = \frac{\prod_{j=1}^{k}(\lambda_{j-1}/\mu_j)}{1+\sum_{k=1}^{N}\prod_{j=1}^{k}(\lambda_{j-1}/\mu_j)}$$

és

$$p_0 = \frac{1/\lambda_0}{1/\lambda_0 + 1/\mu_1 + (1/\mu_1)\sum_{k=2}^{N}\prod_{j=2}^{k}(\lambda_{j-1}/\mu_j)} =$$

$$\frac{1}{1+\sum_{k=1}^{N}\prod_{j=1}^{k}(\lambda_{j-1}/\mu_j)}$$

ami összhangban van a korábbi eredménnyel.

2.5.4. Tranziens eloszlás

1. a Laplace-transzformáció alkalmazása tranziens eloszlás előállítására

$$\frac{d}{dt}P(t) = P(t)\boldsymbol{Q}$$

$$sP^*(s) - P(0) = P^*(s)\boldsymbol{Q}$$

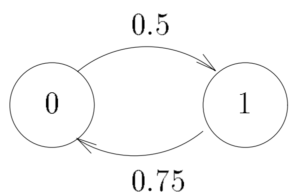
$$P^*(s) = P(0)\left[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}\right]^{-1} \tag{2.32}$$

$$\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{s\to 0} s\, P^*(s) = P(0) \lim_{s\to 0} s \ \left[s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}\right]^{-1}$$

(*Határeloszlás létezésének feltétele a kifejezés alapján*)

2. kétállapotú példa a tranziens és egyensúlyi eloszlás eloszlás előállítására

$$\boldsymbol{Q} = [q_{ij}] = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ 0.75 & -0.75 \end{bmatrix}$$



- határeloszlás meghatározása ($0 = P\boldsymbol{Q}$)

$$0 = -0.5p_0 + 0.75p_1; \quad 0 = 0.5p_0 - 0.75p_1; \quad p_0 + p_1 = 1$$

$$2p_0 = 3p_1 \quad \longrightarrow \quad p_0 = 0.6, \quad p_1 = 0.4$$

- tranziens eloszlás

$$\boldsymbol{Y} = s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} s+0.5 & -0.5 \\ -0.75 & s+0.75 \end{bmatrix}$$

$$det(\boldsymbol{Y}) = det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{Q}) = s(s+1.25)$$

Cramer-szabály: az i. sort $P(0)$-lal helyettesítve ($\boldsymbol{Y}_i(s)$):

$$P_i(s) = \frac{det(\boldsymbol{Y}_i(s))}{det(\boldsymbol{Y}(s))}$$

Legyen $P(0) = [P_0(0) \;\; P_1(0)]$:

$$det(\boldsymbol{Y}_0(s)) = \begin{bmatrix} P_0(0) & P_1(0) \\ -0.75 & s+0.75 \end{bmatrix} = P_0(0)(s+0.75) + P_1(0)0.75$$

$$det(\boldsymbol{Y}_1(s)) = \begin{bmatrix} s+0.5 & -0.5 \\ P_0(0) & P_1(0) \end{bmatrix} = P_0(0)0.5 + P_1(0)(s+0.5)$$

$$P_0(s) = P_0(0)\frac{s+0.75}{s(s+1.25)} + P_1(0)\frac{0.75}{s(s+1.25)}$$

$$P_1(s) = P_0(0)\frac{0.5}{s(s+1.25)} + P_1(0)\frac{s+0.5}{s(s+1.25)}$$

$$P_0(t) = P_0(0)(\frac{0.75}{1.25} + \frac{0.5}{1.25}\ \mathrm{e}^{-1.25t}) + P_1(0)(\frac{0.75}{1.25} - \frac{0.75}{1.25}\ \mathrm{e}^{-1.25t})$$

$$P_0(t) = 0.6 + 0.4P_0(0)\mathrm{e}^{-1.25t} - 0.6P_1(0)\mathrm{e}^{-1.25t})$$

$$P_1(t) = P_0(0)(\frac{0.5}{1.25} - \frac{0.5}{1.25}\ \mathrm{e}^{-1.25t}) + P_1(0)(\frac{0.5}{1.25} + \frac{0.75}{1.25}\ \mathrm{e}^{-1.25t})$$

$$P_1(t) = 0.4 - 0.4P_0(0)\mathrm{e}^{-1.25t} + 0.6P_1(0)\mathrm{e}^{-1.25t})$$

Ha $P_0(0) = 1, \quad P_1(0) = 0$:

$$P_0(t) = 0.6 + 0.4\ \mathrm{e}^{-1.25t}, \qquad P_1(t) = 0.4 - 0.4\ \mathrm{e}^{-1.25t}$$

2.5.5. Poisson folyamat *(tiszta születési folyamat)*

1. értelmezés:
$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & j = i+1, \ \ i \geq 0 \\ -\lambda & j = i, \ \ i \geq 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$
Minden állapot eredő kilépési rátája λ, az állapot elhagyása mindig új érkezés hatására történik, azaz az érkezési időpontok közötti időközök eloszlása azonos λ paraméterű exponenciális eloszlás

2. a folyamat nem irreducibilis, tehát a határeloszlás nem létezik

3. a tranziens állapotvalószínűség eloszlás előállítása:
$$\frac{d}{dt}P_j(t) = P_{j-1}(t)\lambda - P_j(t)\lambda, \quad j > 0, \quad \frac{d}{dt}P_0(t) = -P_0(t)\lambda$$
Bevezetve az állapotvalószínűségeloszlás $P(z,t) = \sum_{j=0}^{\infty} P_j(t)z^j$ z-transzformáltját:
$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{d}{dt}P_j(t)z^j = \sum_{j=1}^{\infty} P_{j-1}(t)\lambda z^j - \sum_{j=1}^{\infty} P_j(t)\lambda z^j$$
$$\frac{\partial}{\partial t}P(z,t) - \frac{d}{dt}P_0(t) = \lambda z P(z,t) - \lambda P(z,t) + \lambda P_0(t)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}P(z,t) = -\lambda(1-z)P(z,t)$$
Most alkalmazva a Laplace-transzformációt és figyelembe véve a $P_0(0) = 1$ (P(z,0) = 1) kezdeti feltételt, a megoldás:
$$sP(z,s) - P(z,0) = -\lambda(1-z)P(z,s)$$
$$P(z,s) = \frac{1}{s+\lambda-\lambda z} = \frac{1/(s+\lambda)}{1-\lambda z/(s+\lambda)} = \frac{1}{s+\lambda}\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{\lambda}{s+\lambda})^j z^j$$
ahonnan $P_j(s) = \dfrac{\lambda^j}{(s+\lambda)^{j+1}}$, s innen
$$P_j(t) = \frac{(\lambda t)^j}{j!}e^{-\lambda t}, \tag{2.33}$$
ami λt paraméterű Poisson eloszlást eredményez.

4. a t-alatti $X(t)$ érkezések számának várható értéke:

$$\mathbf{E}(X(t)) = \frac{\partial}{\partial z}P(z,t)\bigg|_{z=1} = LT^{-1}\frac{\partial}{\partial z}P(z,s)\bigg|_{z=1} =$$

$$LT^{-1}\frac{\lambda}{(s+\lambda(1-z))^2}\bigg|_{z=1} = LT^{-1}\frac{\lambda}{s^2}$$

ahonnan

$$\mathbf{E}(X(t)) = \lambda t \tag{2.34}$$

azaz az érkezések számának várható értéke lineárisan nő az idővel, így állandó az érkezési intenzitás.

Következtetés: az állandó születési (érkezési) intenzitású folyamat, az azonos λ paraméterű érkezési időközök, valamint a Poisson érkezési folyamat equivalens kijelentések

5. a t-alatti érkezések számának szórása:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}P(z,t)\bigg|_{z=1} = LT^{-1}\frac{\partial}{\partial z}P'(z,s)\bigg|_{z=1} =$$

$$LT^{-1}\frac{2(s+\lambda(1-z))\lambda^2}{(s+\lambda(1-z))^4}\bigg|_{z=1} = LT^{-1}\frac{2\lambda^2}{s^3}$$

ahonnan

$$\mathbf{E}(X^2(t)) = LT^{-1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}P(z,s)\bigg|_{z=1} + \mathbf{E}(X(t)) = (\lambda t)^2 + \lambda t \tag{2.35}$$

s innen 2.35 és 2.34-ból

$$\sigma^2 = \mathbf{E}(X^2(t)) - (\mathbf{E}(X(t)))^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t - (\lambda t)^2 = \lambda t \tag{2.36}$$

6. Független Poisson folyamatok szuperpoziciója is Poisson folyamat. Legyenek $X_1(t), \cdots, X_n(t)$ független Poisson folyamatok $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ paraméterrel. Ekkor a folyamatok $X(t) = X_1(t) + \cdots, X_n(t)$ szuperpoziciója ugyancsak Poisson folyamat, $\lambda = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$ paraméterrel.
Bizonyítás: először csak két folyamatra vizsgálva
Jelölje $X(t,\tau) = X(\tau) - X(t)$ az érkezések számát a $[t,\tau)$ intervallumban. Ekkor:

$$\mathbf{P}(X(u,u+t) = n) = \sum_{i=0}^{n}\mathbf{P}(X_1(u,u+t) = i \cap X_2(u,u+t) = n-i) =$$

$$\sum_{i=0}^{n} \mathbf{P}(X_1(u,u+t)=i)\mathbf{P}(X_2(u,u+t)=n-i) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(\lambda_1 t)^i}{i!} e^{-\lambda_1 t} \frac{(\lambda_2 t)^{(n-i)}}{(n-i)!} e^{-\lambda_2 t} =$$

$$\frac{e^{-\lambda_1 t} e^{-\lambda_2 t}}{n!} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\lambda_1 t)^i (\lambda_2 t)^{(n-i)} = \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{n!} ((\lambda_1+\lambda_2)t)^n$$

ahonnan $n > 2$-re teljes indukcióval belátható.

Másik megoldás: z-transzformációval

$$P_k(z,t) = \mathrm{e}^{(z-1)\lambda_k t}, \quad \forall k = 1, \cdots, n$$

$$P(z,t) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{(z-1)\lambda_k t} = \mathrm{e}^{(z-1)\sum_{k=1}^{n} \lambda_k t} = \mathrm{e}^{(z-1)\lambda t}$$

7. Poisson folyamatok véletlen dekompoziciója is Poisson folyamat
   Legyen $q_1, \cdots, q_m$ az $1, \cdots, m$ típusú beérkezés valószínűsége, $q_1 + \ cdots + q_m = 1$. Ekkor:

$$\mathbf{P}(X(\tau, \tau+t) = n_1 + \cdots + n_m = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \frac{n!}{n_1! \cdots n_m!} q_1^{n_1} \cdots q_m^{n_m} =$$

$$\frac{(q_1 \lambda t)^{n_1}}{n_1!} e^{-q_1 \lambda t} \cdots \frac{(q_m \lambda t)^{n_m}}{n_m!} e^{-q_m \lambda t} = \prod_{k=1}^{n} \frac{(q_k \lambda t)^{n_k}}{n_k!} e^{-q_k \lambda t}$$

8. a Poisson folyamat matematikai alapdefiniciója: *Györfi, Páli*
   Legyen $\lambda > 0$ szám, s legyen $X(t) = \#\{i : 0 \leq T_i < t\}$, $(t \geq 0)$, ahol $\{T_i\}_{i=-\infty}^{\infty}, \cdots, T_{i-1} < T_i < T_{i+1}$ véletlen pontsorozat. $X(t)$-t λ paraméterű Poisson folyamatnak nevezzük, ha

   - $X(t)$ eloszlása λt paraméterű Poisson eloszlás, azaz
     $X(0) = 0, \quad \mathbf{P}(X(t) = k) = \dfrac{(\lambda t)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda t}, \quad (t > 0, k \in S)$
   - $X(t)$ független növekményű, azaz $\forall n \geq 2$ egészre és $0 < t_1 < \cdots < t_n$-re az $X(t_1) - X(t_0), X(t_2) - X(t_1), \cdots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ valószínűségi változók teljesen függetlenek
   - $X(t)$ stacionárius növekményű, azaz $\forall u, t > 0$-ra az $X(t) - X(0)$ és az $X(t+u) - X(u)$ valószínűségi változók eloszlása megegyezik

9. a Poisson folyamat alternatív matematikai definiciója:

   - $\mathbf{P}(X(t) = 0) = 1 - \lambda t + o(t)$
   - $\mathbf{P}(X(t) = 1) = \lambda t + o(t)$ *sűrűségi feltétel*
   - $\mathbf{P}(X(t) \geq 2) = o(t)$ *ritkasági feltétel*

2.6. Markov folyamatok általánosításai

2.6.1. Felújítási folyamatok

Legyen $T_1, T_2, \ldots$ valamely esemény egymást követő bekövetkezéseinek időpontja, s jelölje $Z_i = T_i - T_{i-1}$, $T_0 = 0$, $i > 0$ az egymást követő események közötti időintervallum hosszát. Ha a Z_i, $i > 0$ véletlen változók független, azonos eloszlású valószínűségi változók, akkor a T_i, $i \geq 0$ folyamatot felújítási (renewal) folyamatnak nevezzük, ahol Z_i a felújítási intervallumokat jelöli.

1. $\forall T_i$ időpontban teljesül a Markov tulajdonság

2. a Markov folyamatok fogalmának általánosítása (általános eloszlású a tartásidő) és szűkítése (egyállapotú folyamat)

3. ha Y_i egy másik véletlen változó, amely

   - függ Z_i-től
   - a Z_i intervallum egy véletlen része, ($Y_i \leq Z_i$)
   - továbbá a (Z_1, Y_1), $(Z_2, Y_2), \cdots$ párok egymástól függetlenek

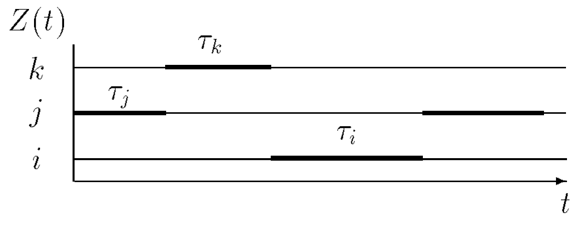
   Legyen $p(t)$ annak valószínűsége, hogy t egy Y_i intervallum belsejébe esik, ekkor:

$$\lim_{t \to \infty} p(t) = \frac{\mathbf{E}(Y)}{\mathbf{E}(Z)} \tag{2.37}$$

4. példa: orvosi rendelő, s a rendelésen belül az asszisztens tevékenysége

5. általánosítás: többállapotú felújítási folyamat – Markov regeneratív folyamat

2.6.2. Fél-Markov (Szemi-Markov) folyamat



1. olyan többállapotú felújítási folyamat, amelyben az egymást követő állapotok és az állapotokban eltöltött idő függenek egymástól. Az egymás utáni állapotok diszkrét idejű Markov láncot alkotnak (ez nevezik az állapotváltások pillanatába *beágyazott Markov lánc*nak). Az állapottartásidők általános eloszlásúak.

2. minden állapotváltási időpontban teljesül a Markov tulajdonság
3. egyensúlyi állapotvalószínűség:

$$p_i = \frac{p_i^a \ \mathbf{E}(\tau_i)}{\sum_{j \in S} \ p_j^a \ \mathbf{E}(\tau_j)} \tag{2.38}$$

ahol

- $\mathbf{E}(\tau_i)$ az i állapotban az állapot tartásidejének várható értéke
- p_j^a a beágyazott diszkrét idejű Markov lánc határeloszlása.

3. fejezet

TÖMEGKISZOLGÁLÁS-ELMÉLETI ALAPISMERETEK

3.1. Sorbanállási rendszerek jelölése (*Kendall*)

1.

$$A/B/c/d/e - x$$

- A: az érkezési időközök eloszlásának típusa.
  Lehetőségek:
  - M: emlékezetmentes eloszlás (folytonos időben markovi) exponenciális eloszlás
  - $Geom$: emlékezetmentes eloszlás (diszkrét időben markovi) geometriai eloszlás
  - D: determinisztikus eloszlás
  - G: általános eloszlás (*egyes -főleg régebbi - irodalmakban egyúttal független és azonos általános eloszlás*)
  - GI: (*egyes újabb irodalmakban ezt használják a független, azonos, általános eloszlás jelölésére*)
- B: a kiszolgálási idő eloszlásának típusa. Lehetőségek: ld. A
- c: a kiszolgáló egységek száma (véges vagy végtelen is lehet)
- d: a rendszer kapacitása, beleértve a kiszolgáló egységet is
- e: az igényforrások száma

- x: a kiszolgálás elve

FIFO (FCFS)	–	First In First Out (First Come First Served)
LIFO (LCLS)	–	Last In First Out (Last Come First Served)
RO	–	Random Order
RR	–	Round Robin
PS	–	Processor Sharing
Priority		

2. példák:

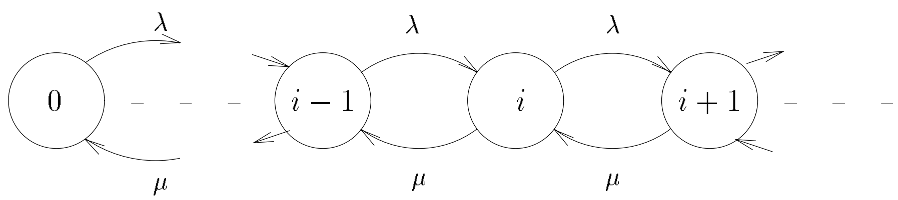
- $M/M/1 \quad \leftarrow \quad M/M/1/\infty/\infty - FIFO$
- $M/M/1 - LIFO \quad \leftarrow \quad M/M/1/\infty/\infty - LIFO$
- $M/G/2/3/10 \quad \leftarrow \quad M/G/2/3/10 - FIFO$
- $G/M/1//6 \quad \leftarrow \quad G/M/1/\infty/6 - FIFO$

3.2. A klasszikus sorbanállási rendszer: $M/M/1$

1. speciális születési-halálozási folyamat (*végtelen állapottérrel*)
   - érkezési folyamat: Poisson, λ intenzitással
   - kiszolgálási idő: exponenciális eloszlású, μ paraméterrel
   - kiszolgálási elv: $FIFO$

2. a rátamátrix elemei:

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & j = i+1, \ i \geq 0 \\ \mu & j = i-1, \ i > 0 \\ -\lambda - \mu & j = i, \ i > 0 \\ -\lambda & j = i, \ i = 0 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



3. a határeloszlás létezik (a rendszer stabil), ha $0 < \lambda < \mu < \infty$

$$p_{k-1}\lambda + p_{k+1}\mu = p_k(\lambda + \mu), \quad k > 0$$

$$p_1\mu = p_0\lambda$$

amiből

$$p_k = \frac{\lambda}{\mu}\, p_{k-1} = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k, \quad \forall k \geq 0 \tag{3.1}$$

és

$$p_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k} = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \tag{3.2}$$

4. a kiszolgáló foglaltságának valószínűsége — a csatornakihasználtság Vezessük be a következő jelölést: $\rho = \lambda/\mu < 1$, amiből

$$p_0 = 1 - \rho \qquad p_k = (1-\rho)\rho^k \qquad k \geq 0 \tag{3.3}$$

$$\mathbf{P}(\text{a kiszolgáló foglalt}) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \ = 1 - p_0 \ = 1 - (1-\rho) \ = \ \rho \tag{3.4}$$

Másrészt: $\mathbf{E}(X_s) = 0\ p_0 + 1\ (1 - p_0)$ ahonnan

$$\mathbf{E}(X_s) = \rho \tag{3.5}$$

Összhangban a Little formulával, ha $\rho < 1$ (azaz a rendszer stabil)

$$\mathbf{E}(X_s) = \bar{\lambda}\bar{x} = \frac{\lambda}{\mu} = \rho \tag{3.6}$$

mivel $\bar{\lambda} = \lambda$ és $\bar{x} = \frac{1}{\mu}$.

5. A rendszerbeli igények számának várható értéke

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=0}^{\infty} k\ p_k \ = \sum_{k=0}^{\infty} k\ (1-\rho)\rho^k \ = \rho(1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} k\ \rho^{k-1} \ =$$

$$\rho(1-\rho) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{d}{d\rho}\rho^k \ = \rho(1-\rho)\ \frac{d}{d\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \rho^k \ = \rho(1-\rho)\ \frac{1}{(1-\rho)^2}$$

ahonnan:

$$\mathbf{E}(X) = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{3.7}$$

6. A várakozó igények számának várható értéke

$$\mathbf{E}(X_w) = \sum_{k=1}^{\infty} (k-1)\, p_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p_k - \sum_{k=1}^{\infty} p_k =$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} k\,(1-\rho)\rho^k - (1-p_0) = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho$$

s ebből

$$\mathbf{E}(X_w) = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{3.8}$$

Nyílvánvalóan igaz, hogy

$$X = X_w + X_s \tag{3.9}$$

és így

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X_w) + \mathbf{E}(X_s) \tag{3.10}$$

így

$$\mathbf{E}(X_w) = \mathbf{E}(X) - \mathbf{E}(X_s) = \frac{\rho}{1-\rho} - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho} \tag{3.11}$$

7. időjellemzők (T, W, x)

$$T = W + x \tag{3.12}$$

így

$$\bar{T} = \bar{W} + \bar{x} \tag{3.13}$$

A Little formulából:

$$\bar{T} = \frac{\mathbf{E}(X)}{\lambda} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} \tag{3.14}$$

$$\bar{W} = \frac{\mathbf{E}(X_w)}{\lambda} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} \tag{3.15}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{\mu} \tag{3.16}$$

s teljesül a fenti összefüggés.

Másként felírva $\bar{T}$-t:

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = \frac{1-\rho+\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} + \frac{\rho}{\mu(1-\rho)} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho} = \frac{1}{\mu} + \sum_{k=0}^{\infty} k\,\frac{1}{\mu}\,p_k$$

(*A kifejezés interpretálása: a Poisson érkezési folyamat az érkezések pillanatában a határeloszlást látja!*)

8. (*megjegyzés: valójában a $FIFO$ elv csak a késleltetési idő eloszlásában játszik szerepet s nem a várható értékben!*)

9. adott számnál több igény rendszerben tartózkodásának valószínűsége

$$\mathbf{P}(X \geq k) = \sum_{i=k}^{\infty}(1-\rho)\rho^i = (1-\rho)\rho^k \sum_{j=0}^{\infty}\rho^j = \rho^k \tag{3.17}$$

10. 1. példa: Adott egy koncentrátor, amely terminálok egy csoportjától kap üzeneteket, s azokat egy átviteli összeköttetésen keresztül továbbítja. Tegyük fel, hogy az üzenetek Poisson eloszlás szerint érkeznek, 1 üzenet 4 millimásodpercenként, az üzenetek kiszolgálási ideje exponenciális eloszlású, 3.0 millimásodperc várható értékkel.
Mennyi a rendszerbeli igények számának várható értéke?

$$\rho = \frac{1}{4}3 = \frac{3}{4}$$

$$\mathbf{E}(X) = \frac{\rho}{1-\rho} = 3$$

Mennyi az igények rendszerben eltöltött várható ideje?

$$\mathbf{E}(T) = \frac{\mathbf{E}(X)}{\lambda} = \frac{3}{1/4} = 12msec$$

Az érkezési ráta mekkora növekménye duplázná meg a az utóbbi késleltetési időt?

$$\mathbf{E}(T') = 24 = \frac{\mathbf{E}(x)}{1-\rho'} = \frac{3}{1-\rho'}$$

$$\rho' = 1 - \frac{1}{8} = 7/8$$

ahonnan:

$$\lambda' = \rho'\mu = \frac{7}{8\,3} = \frac{7}{24}$$

ami mindössze 17%-os érkezési ráta növekedést jelent.

11. 2. példa: Egy nagy processzor az igényeket $K\mu$ rátával szolgálja ki. Tegyük fel, hogy a igények érkezési folyamata Poisson, $K\lambda$ paraméterrel, és hogy az igények kiszolgálási ideje exponenciális eloszlású. Legyen feladatunk, hogy elkerüljük a nagy processzor alkalmazását, s vizsgáljuk meg, hogy mi a következménye, ha azt K darab kisebbre cseréljük úgy, hogy mindegyik kisebb processzor μ paraméterű kiszolgálást végez, s az igényeket λ paraméter szerinti Poisson folyamatból kapja (ld. Poisson folyamatok dekompozíciója). Hasonlítsuk össze a kétféle megoldást!

Nagy processzoros kiszolgálás:

$$\rho = \frac{K\lambda}{K\mu} = \frac{\lambda}{\mu}$$

$$\mathbf{E}(T) = \frac{\mathbf{E}(x)}{1-\rho} = \frac{1}{K\mu(1-\rho)}$$

K darab kis processzoros kiszolgálási eset:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

processzoronként, és

$$\mathbf{E}(T') = \frac{\mathbf{E}(x)}{1-\rho} = \frac{1}{\mu(1-\rho)} = K\mathbf{E}(T)$$

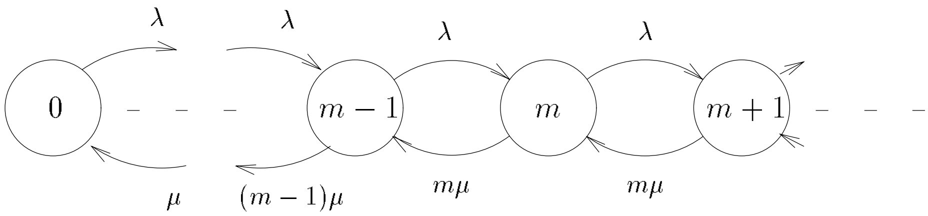
azaz a rendszerben eltöltött idő K-szorosra nő.

3.3. Az $M/M/m$ rendszer

1. speciális születési-halálozási folyamat (*végtelen állapottérrel*)
   - érkezési folyamat: Poisson, λ intenzitással
   - kiszolgálási idő: exponenciális eloszlású,
     kiszolgáló egységenként μ paraméterrel
   - kiszolgálási elv: $FIFO$

2. a rátamátrix elemei:

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & j=i+1,\ i\geq 0 \\ i\mu & j=i-1,\ 0<i\leq m \\ m\mu & j=i-1,\ i>m \\ -\lambda-i\mu & j=i,\ 0\leq i\leq m \\ -\lambda-m\mu & j=i,\ i\geq m \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$



3. a határeloszlás: létezik (a rendszer stabil), ha $0 < \lambda < m\mu < \infty$

$$p_{k-1}\lambda + p_{k+1}(k+1)\mu = p_k(\lambda + k\mu), \quad 0 < k < m$$

$$p_{k-1}\lambda + p_{k+1}m\mu = p_k(\lambda + m\mu), \quad k \geq m$$

$$p_1\mu = p_0\lambda$$

amiből

$$p_k = \frac{\lambda}{k\mu}p_{k-1} = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}p_0 \quad k = 1, 2, \cdots, m \tag{3.18}$$

valamint

$$p_k = \frac{\lambda}{m\mu}p_{k-1} \quad k = m+1, m+2, \cdots \tag{3.19}$$

s így

$$p_{m+i} = \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^i p_m \quad i \geq 1 \tag{3.20}$$

A fenti összefüggések együttes felírásából pedig

$$p_j = \begin{cases} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!}\, p_0 & j = 1, 2, \cdots, m \\ \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{m!}\frac{1}{m^{j-m}}\, p_0 & j > m \end{cases} \tag{3.21}$$

Kifejezve p_0-át:

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{j!} + \sum_{j=m+1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{1}{m!}\frac{1}{m^{j-m}}} \tag{3.22}$$

amelyből a nevező második tagja a következő alakban írható:

$$\frac{m^m}{m!}\sum_{j=m}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^j = \frac{\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^m}{\left(1 - \frac{\lambda}{m\mu}\right)}\frac{m^m}{m!} \tag{3.23}$$

4. késleltetési idők:

$$\bar{T} = \bar{x} + \bar{W} = \frac{1}{\mu} + \sum_{k=m}^{\infty} E[W \mid k]\; p_k^{(a)} \tag{3.24}$$

ahol k a rendszerben tartózkodó igények száma egy új érkezést megelőzően, és $p_k^{(a)}$ a sorhossz eloszlása az érkezések elötti időpillanatokban. Könnyen belátható, hogy:

$$E[T] = \frac{1}{\mu} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k-m+1}{m\mu} p_k \tag{3.25}$$

amelyből:

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu} + \sum_{k=m}^{\infty} \frac{k-m+1}{m\mu} p_m \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{k-m} = \frac{1}{\mu} + \frac{p_m}{m\mu} \sum_{k=m}^{\infty} (k-m+1) \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{k-m} \tag{3.26}$$

mivel az érkezési folyamat Poisson, s ebből

$$\bar{T} = \frac{1}{\mu} + \frac{p_m}{m\mu} \sum_{i=1}^{\infty} i \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^{i-1} = \frac{1}{\mu} + \frac{m\mu p_m}{(m\mu-\lambda)^2} \tag{3.27}$$

illetve a Little formula alkalmazásával:

$$\mathbf{E}(X) = \lambda\bar{T} = \frac{\lambda}{\mu} + \frac{m\lambda\mu p_m}{(m\mu-\lambda)^2} \tag{3.28}$$

5. a modell alkalmazása a távbeszélőtechnikában

   - várakozásos rendszerek: (pl. mobil)
   - a foglaltság valószínűsége

$$P\{\text{várakozás}\} = \sum_{k=m}^{\infty} p_k = \sum_{k=m}^{\infty} p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{m!}\frac{m^m}{m^k} = \frac{m^m}{m!} p_0 \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^k$$

$$= p_0 \frac{m^m}{m!} \frac{\left(\frac{\lambda}{m\mu}\right)^m}{1-\frac{\lambda}{m\mu}} = p_0 \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{1-\gamma} = \frac{\frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{1-\gamma}}{\sum_{k=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} + \frac{1}{m!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{1-\gamma}}$$

ahol $\gamma = \dfrac{\lambda}{m\mu}$.

Ezen képlet az *ErlangC* formula néven ismert, ahol paraméterei: m és λ/μ, s amelyekkel a jelölés $C(m, \lambda/\mu)$.

6. 3. példa: Egy vállalat két telephelyét négy magánvonallal köti össze. Tegyük fel, hogy kétpercenként egy igény érkezik Poisson folyamat szerint, s egy-egy exponenciális tartásidejű beszélgetés átlagosan négy perces. Ha minden vonal foglalt, a hívás addig vár, amig egy vonal fel nem szabadul. Határozza meg annak valószínűségét, hogy egy igénynek várnia kell!

$$\lambda = 1/2, \quad 1/\mu = 4, \quad a = \lambda/\mu = 2, \quad \rho = a/m = 2/4 = 0.5$$

Ezért:

$$p_0 = \frac{1}{1 + 2 + 2^2/2 + 2^3/6 + 16/24(1/(1-0.5)} = 3/23$$

ahonnan

$$C(4,2) = \frac{2^4/4!}{1-0.5}\frac{3}{23} = 4/23 = 0.17$$

7. 4. példa: Hasonlítsuk össze az $M/M/1$ és az $M/M/2$ rendszer jellemzőit, ha $\lambda = 1/2$ mindkét rendszerre, míg $\mu_1 = 1$ és $\mu_2 = 1/2$.
Az $M/M/1$ rendszerre:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu_1} = \frac{1/2}{1} = 0.5$$

$$\mathbf{E}(W) = \frac{\rho/\mu}{1-\rho} = 1sec$$

$$\mathbf{E}(T) = \frac{1/\mu}{1-\rho} = 2sec$$

Az $M/M/2$ rendszerre:

$$a = \frac{\lambda}{\mu_2} = \frac{1/2}{1/2} = 1, \ \rho = a/m = 1/2 = 0.5$$

$$p_0 = \frac{1}{1 + 2 + \frac{a^2/2}{1-0.5}} = 1/3$$

amiből

$$C(2,1) = \frac{a^2/2}{1-0.5}p_0 = 1/3$$

$$\mathbf{E}(W') = \frac{1/\mu_2}{1-\rho}C(2,1) = 2/3$$

$$\mathbf{E}(T) = 2/3 + 1/\mu_2 = 8/3sec$$

azaz az $M/M/1$ rendszerben kisebb az eltöltött összidő, de nagyobb a várakozási idő.

3.4. Az $M/M/\infty$ rendszer

1. az $M/M/m$ rendszer speciális esete

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda & i \geq 0 \\ \mu_i = i\mu & i \geq 1 \end{cases} \tag{3.29}$$

amiből

$$p_k = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} \qquad k \geq 1 \tag{3.30}$$

s így

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}} = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}} = \mathrm{e}^{-\lambda/\mu} \tag{3.31}$$

valamint $0 < \lambda, \mu < \infty$ esetén stabil Markov lánchoz jutva:

$$p_k = \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda/\mu} \qquad k \geq 0 \tag{3.32}$$

Poisson eloszláshoz jutunk, amelyre

$$E[X] = \bar{\lambda}\, \bar{T} = \lambda \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda}{\mu} \tag{3.33}$$

3.5. Az $M/M/m/m$ rendszer

1. az $M/M/m$ rendszer speciális esete

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda & 0 \leq i < m \\ \mu_i = i\mu & 0 < i \leq m \end{cases} \tag{3.34}$$

2. a határeloszlás

$$p_k = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!} \quad k = 1, 2, \cdots, m \tag{3.35}$$

ahol

$$p_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}} \tag{3.36}$$

Az $M/M/m/m$ rendszer stabil ($p_k > 0 \;\; \forall k$-ra), ha teljesül, hogy $0 < \lambda, \mu < \infty$ azaz, ha mint az érkezési időközök mind a kiszolgálási idők várható értéke 0-nál nagyobb, de véges.

3. az átlagos érkezési intenzitás

$$\bar{\lambda} = \sum_{k=0}^{m-1} \lambda_k p_k = \lambda(1 - p_m) \tag{3.37}$$

4. a rendszerbeli igények várható száma

$$E[X] = \frac{\lambda}{\mu}(1 - p_m) \tag{3.38}$$

ami a Little formulával is összevethető.

5. távközlési alkalmazással — veszteséges rendszer

$$P\{\text{veszteség}\} = p_m^{(a)} = p_m = \frac{\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^m \frac{1}{m!}}{\sum_{k=0}^{m} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{1}{k!}} = B(m, \lambda/\mu) \tag{3.39}$$

ami összefüggés az Erlang B formula néven ismert.

6. 5. példa: Egy vállalat két telephelyét négy magánvonallal köti össze. Tegyük fel, hogy kétpercenként egy igény érkezik Poisson folyamat szerint, s egy-egy exponenciális tartásidejű beszélgetés átlagosan négy perces. Ha minden vonal foglalt, a hívás elveszik. Határozza meg annak valószínűségét, hogy egy igény elveszik! Hasonlítsa össze az igényvesztés valószínűségét és a várakozás valószínűségét a 3. példában! Magyarázza meg a különbséget!

$$p_v = B(4,2) = \frac{16/24}{1 + 2 + 2^2/2 + 2^3/6 + 16/24} = \frac{2/3}{5 + 4/3 + 2/3} = 2/21 = 0.095$$

$0.095 < 0.17$, mivel ekkor az elvesző igények nem "terhelik" a rendszert, azaz: $B(4,2) < C(4,2)$ teljesül.

3.6. $M/M/1//N$ rendszer

1. a rátamátrix elemei

$$\lambda_i = (N - i)\lambda \quad 0 \le i \le N$$

$$\mu_i = \mu \quad i \ge 1$$

2. az átlagos érkezési intenzitás

$$\bar{\lambda} = \sum_{i=0}^{N} \lambda_i p_i = \sum_{i=0}^{N-1} (N-i)\,\lambda\, p_i \tag{3.40}$$

3. a Markov lánc mindig stabil, és $p_k > 0, \quad \forall 0 \leq k \leq N$, ha mind az érkezési időközök mind a kiszolgálási idők várható értéke 0-nál nagyobb, de véges.

4. a határeloszlás

$$p_k = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k [N(N-1)\cdots(N-k+1)] = p_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \frac{N!}{(N-k)!} \quad k = 1, 2, \cdots, N \tag{3.41}$$

ahol

$$p_0 = \frac{1}{1 + \sum\limits_{j=1}^{N} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^j \frac{N!}{(N-j)!}} \tag{3.42}$$

5. a csatornakihasználtság: $\rho = 1 - p_0$

6. Mivel a Little formula alkalmazásával:

$$\mathbf{E}(X_s) = \rho = \bar{\lambda}\mathbf{E}(x) = \bar{\lambda}/\mu$$

ahonnan az átlagos érkezési intenzitás kifejezhető:

$$\bar{\lambda} = \frac{\rho}{\mathbf{E}(x)} = \mu\rho = \mu(1 - p_0) \tag{3.43}$$

7. Az átlagos érkezési intenzitás másképpen is levezethető, ugyanis egy igényforrásra igaz, hogy átlagosan $(1/\lambda + \mathbf{E}(T))^{-1}$ időegységenként generál egy igényt, ahonnan a K igényforrásra:

$$\bar{\lambda} = \frac{K}{1/\lambda + \mathbf{E}(T)}$$

ahonnan:

$$\mathbf{E}(T) = \frac{K}{\bar{\lambda}} - \frac{1}{\lambda} \tag{3.44}$$

s ebből a Little formula alkalmazásával:

$$\mathbf{E}(X) = \bar{\lambda}\mathbf{E}(T) = K - \frac{\bar{\lambda}}{\lambda} \tag{3.45}$$

illetve $\mathbf{E}(T)$-ből $\mathbf{E}(W) = \mathbf{E}(T) - \dfrac{1}{\mu}$.

8. Végül megadható egy forrás foglaltságának valószínűsége is:
$$\mathbf{P}(\text{a forrás foglalt}) = \frac{\mathbf{E}(T)}{1/\lambda + \mathbf{E}(T)}$$

9. 6. példa: Tegyük fel, hogy egy számítógéphez K terminál juttat igényeket. Minden terminál α paraméterű exponenciális gondolkodási idővel állítja elő a tranzakcióit, s azok a számítógéptől μ paraméterű exponenciális kiszolgálási időt igényelnek. *átvitel*-nek (throughput) nevezzük az igények kiszolgálás befejezési rátáját, s a rendszer *válaszidejének* az igények rendszerben eltöltött összidejét. Adjuk meg az átvitel és a válaszidő értékét két extrém esetben, amikor K kicsi és amikor K nagy!

   - K kicsi (pontosabban $\lambda K \ll \mu$, azaz nincs "sok" várakozás):
   $$\mathbf{E}(T) = \frac{1}{\mu}$$
   $$\bar{\lambda} = \frac{K}{1/\lambda + \mathbf{E}(T)} = \frac{K}{1/\lambda + 1/\mu}$$
   - K nagy: (pontosabban $\lambda K \gg \mu$, azaz "szinte mindig" van igény a rendszerben:
   $$\bar{\lambda} = \mu$$
   $$\mathbf{E}(T) = \frac{K}{\mu} - \frac{1}{\lambda}$$
   - A függvények ábrázolása

3.7. $M/M/m/K/N$ rendszer

1. a rátamátrix elemei
$$q_{ij} = \begin{cases} (N-i)\lambda & j=i+1,\ 0 \le i < N \\ i\mu & j=i-1,\ 0 < i \le m \\ m\mu & j=i-1,\ m \le i \le K \\ -(N-i)\lambda - i\mu & j=i,\ 0 \le i \le m \\ -(N-i)\lambda - m\mu & j=i,\ m \le i < K \\ -m\mu & j=i=K, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

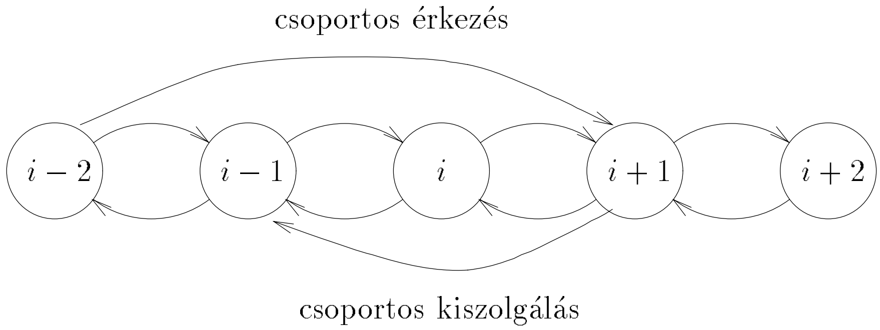
2. grafikus ábrázolás

3. a Markov lánc mindig stabil, és $p_k > 0, \quad \forall 0 \le k \le N$, ha mint az érkezési időközök mind a kiszolgálási idők várható értéke 0-nál nagyobb, de véges.

3.8. Általános folytonos idejű Markov láncok

1. a születési-halálozási folyamatok korlátai

   - exponenciális érkezési időköz
   - exponenciális kiszolgálási idő
   - csoportos érkezés, csoportos kiszolgálás



   - egyetlen kiszolgálási egység (csomópont), *(lehet, hogy több kiszolgáló)*

2. lépcsős kiszolgálás vagy érkezés E_n n-edrendű Erlang eloszlás

   - egy kiszolgálási fokozat idejének sűrűségfüggvénye ($n\mu$ paraméterű exp.)

$$f_{\gamma_i}(t) = n\mu \mathrm{e}^{-n\mu t} \tag{3.46}$$

   - egy kiszolgálási fokozat idejének statisztikai jellemzői

$$\mathbf{E}(\gamma_i) = \frac{1}{n\mu} \tag{3.47}$$

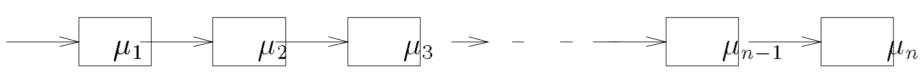
$$\sigma_i^2 = \mathbf{E}(\gamma_i^2) - (\mathbf{E}(\gamma_i))^2 = \frac{1}{(n\mu)^2} \tag{3.48}$$

$$C_i^2 \triangleq \frac{\sigma_i^2}{\mathbf{E}(\gamma_i)^2} = 1 \tag{3.49}$$

   ahol $\mathbf{E}(\gamma_i)$ jelöli γ_i várható értékét, σ_i^2 a szórását, míg C_i a relatív szórást (*coefficient of variation*)

   - Legyen

$$\gamma = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i \tag{3.50}$$



- a rendszer eredő kiszolgálási idejének statisztikai jellemzői

$$f_\gamma^{(n)}(t) = \frac{n\mu(n\mu t)^{n-1}}{(n-1)!}\mathrm{e}^{-n\mu t} \tag{3.51}$$

$$\mathbf{E}(\gamma) = n\mathbf{E}(\gamma_i) = n\frac{1}{n\mu} = \frac{1}{\mu} \tag{3.52}$$

$$\sigma^2 = n\sigma_i^2 = \frac{1}{n\mu^2} \tag{3.53}$$

$$C_\gamma^2 \triangleq \frac{\sigma^2}{\mathbf{E}(\gamma)^2} = \frac{1}{n} \leq 1 \tag{3.54}$$

- a hatás grafikus demonstrációja

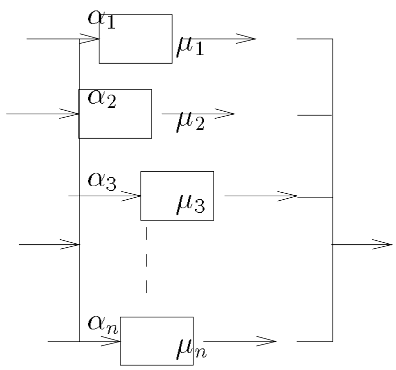
3. párhuzamos kiszolgálás vagy érkezés H_n n-edrendű hiperexponenciális eloszlás

   - n párhuzamos kiszolgáló egységre $\alpha_i, \quad i = 1, \cdots, n$ kiszolgálási valószínűséggel az eredő kiszolgálási idő sűrűségfüggvénye

$$f_\eta(t) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \; \mu_i \; \mathrm{e}^{-\mu_i t} \tag{3.55}$$

ahol

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \tag{3.56}$$



   - eredő kiszolgálási idő statisztikai jellemzők

$$\mathbf{E}(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\mu_i} \tag{3.57}$$

$$\mathbf{E}(\eta^2) = 2\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\mu_i^2} \tag{3.58}$$

$$C_\eta^2 = \frac{2\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\mu_i^2}}{(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\mu_i})^2} - 1 \tag{3.59}$$

Megmutatható (Cauchy-Schwarz-Bunyakovszkij), hogy ekkor ...

- példa: két párhuzamos kiszolgáló egység

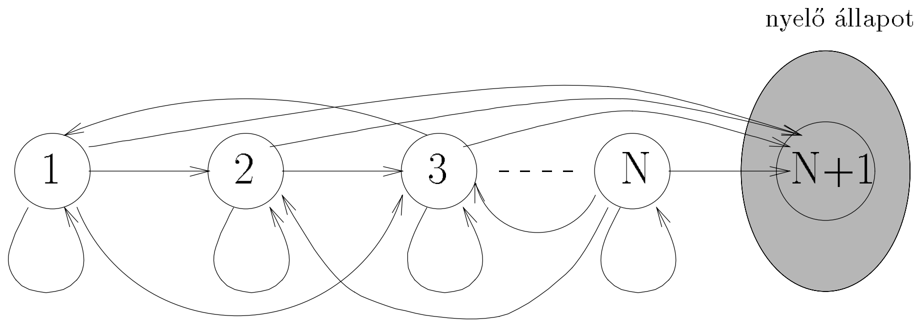
$$f_\eta(t) = \alpha\mu_1 \mathrm{e}^{-\mu_1 t} + (1-\alpha)\mu_2 \mathrm{e}^{-\mu_2 t} \tag{3.60}$$

$$\mathbf{E}(\eta) = \frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{1-\alpha}{\mu_2} \tag{3.61}$$

$$\mathbf{E}(\eta^2) = \frac{2\alpha}{\mu_1^2} + \frac{2(1-\alpha)}{\mu_2^2} \tag{3.62}$$

$$C_\eta^2 = \frac{2\left[\frac{\alpha}{\mu_1^2} + \frac{(1-\alpha)}{\mu_2^2}\right]}{\left(\frac{\alpha}{\mu_1} + \frac{1-\alpha}{\mu_2}\right)^2} - 1 \tag{3.63}$$

4. Phase-type eloszlások:
   Markov lánc nyelő állapotába jutás ideje.



- PH eloszlások megadása: (α, B)
  ahol α az $1, \ldots, N$ állapotok kezdeti valószínűsége,
  és B az $(N+1 \times N+1)$ méretű Q mátrix bal felső $N \times N$ méretű darabja.
- Eloszlás függvény:

$$F_{PH}(t) = Pr(T \le t) = Pr(X(t) = N+1) = 1 - Pr(X(t) \ne N+1)$$
$$= 1 - \sum_{i=1}^{N} Pr(X(t) = i) = 1 - \alpha\; e^{Bt}\; h$$

- Tulajdonságok:
  $(0, \infty)$ intervallumon folytonos, exponenciális "farok eloszlás", a relatív szórás alulról korlátos, a minimális relatív szórást az Erlang eloszlás adja.

Alkamazás:

- (*általános eloszlások közelítése*)
- (*markovi apparátus "kiterjesztése"*)
- (*probléma: állapottér robbanás*)

5. általános Markov láncokkal leírható rendszerek

6. 7. példa: Tekintsünk egy számítógépet, amelybe a job-ok λ paraméterű exponenciális eloszlású érkezési időközökkel érkeznek. Minden job két exponenciális eloszlású időszakaszú kiszolgálást igényel, az első lépésben μ_1, majd a második lépésben μ_2 paraméterrel. Négy különböző esetet vizsgálunk:

   (a) egyetlen processzor van:

      i. nincs puffer a rendszerben,

      ii. végtelen hosszúságú puffer van.

   (b) két processzor van, külön-külön a két lépéshez rendelve:

      i. nincs puffer a rendszerben,

      ii. mindkét processzornak végtelen hosszúságú puffere van,

Feladatok:

(a) Határozza a rendszer kihasználtságát (ρ)!
Esetek: 6.(a)i., 6.(a)ii..

(b) Adja meg mindkét processzor foglaltságának valószínűségét!
Esetek: 6.(b)i., 6.(b)ii..

(c) Adja meg a rendszerben eltöltött összidő várható értékét és az első processzor előtti sor hosszát!
Esetek: 6.(a)ii., 6.(b)ii..

(d) Mi az a maximális érkezési intenzitás, amellyel a job-ok érkezhetnek, ha legalább a job-ok 2/3-át ki akarjuk szolgálni, és $1/\mu_1 = 5$ sec, $1/\mu_2 = 20$ sec.
Esetek: 6.(a)i..

(e) Adja meg (ρ) és ($\mathbf{E}(T)$) értékét akkor, ha a 6.d szerinti maximális λ értékkel érkeznek az igények!
Esetek: 6.(a)ii..

Megoldások I.:

6.a–6.(a)i.. Rajzoljuk fel a rendszer háromállapotú állapotgráfját! A következő összefüggéseket írhatjuk fel:

$$\lambda p_0 = \mu_2 p_2 \tag{3.64}$$
$$\mu_1 p_1 = \lambda p_0 \tag{3.65}$$
$$\mu_1 p_1 = \mu_2 p_2 \tag{3.66}$$

Mivel $p_0 + p_1 + p_2 = 1$, ezért a három egyenlet valamelyikét az utóbbira cserélve:

$$\rho = 1 - p_0 = 1 - \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\mu_1} + \frac{\lambda}{\mu_2}}$$

6.b–6.(b)i..

$$\mathbf{P}(\text{mindkét processzor foglalt}) = p_3 = \frac{\lambda^2\mu_1}{\lambda^2\mu_1 + (\mu_1+\mu_2)(\lambda\mu_1 + \lambda\mu_2 + \mu_1\mu_2)}.$$

6.d–6.(a)i..

$$\mathbf{P}(\text{veszteség}) = \mathbf{P}(\text{a processzor foglalt}) = \rho$$
$$\rho = 1 - p_0 = 1 - \frac{1}{1 + \dfrac{\lambda}{\mu_1} + \dfrac{\lambda}{\mu_2}} < \frac{1}{3}$$

amiből

$$\lambda < \frac{1}{50} 1/\text{sec}.$$

3.9. M/G/1 rendszer

Az M/G/1 rendszer bevezetése

- elkerülhető-e az állapottér robbanás
- az általános kiszolgálási idő eloszlás problémája
  - az $X(t)$ rendszerbeli igények száma nem emlékezetmentes
  - azaz azt is kellene tudni, hogy mennyi idő van még hátra az adott igény kiszolgálásából

3.9.1. Hátralévő működési idő (residual time)

1. paradoxon: exponenciális érkezési időközök — véletlen érkezés — következő érkezésig hátralévő idő eloszlása, momentumok

2. jelölések:

   - ξ: egy (időtartam jellegű) véletlen változó
   - γ: a hátralévő idő, ha véletlen időpontban a α intervallum belsejében kezdi el valaki nézni a rendszert

3. eredmény: az általános momentum értékére

$$\mathbf{E}(\gamma^n) = \frac{\mathbf{E}(\xi^{n+1})}{(n+1)\mathbf{E}(\xi)}$$

   - hátralévő idő várható érték:

$$\mathbf{E}(\gamma) = \frac{\mathbf{E}(\xi^2)}{2\mathbf{E}(\xi)} = \frac{(\mathbf{E}(\xi))^2 + \sigma^2}{2\mathbf{E}(\xi)} = \mathbf{E}(\xi)\frac{1 + C_\xi^2}{2}$$

   - példa, determinisztikus eloszlás: $\mathbf{E}(\xi) = m$, $\mathbf{E}(\xi^2) = m^2$, $C_\xi^2 = 0$

$$\mathbf{E}(\gamma) = \frac{m^2}{2m} = m/2$$

   - példa, exponenciális eloszlás: $\mathbf{E}(\xi) = m$, $\mathbf{E}(\xi^2) = 2m^2$, $C_\xi^2 = 1$

$$\mathbf{E}(\gamma) = \frac{2m^2}{2m} = m$$

4. M/G/1 rendszer: várható várakozási idő ($\mathbf{E}(W)$)
   Legyen: x v.v. az igény kiszolgálási ideje, γ' v.v. egy igény érkezésekor a kiszolgálás alatti igény hátralévő kiszolgálási ideje. Ekkor

$$\mathbf{E}(W) = \mathbf{E}(\gamma') + \mathbf{E}(X_w)\mathbf{E}(x)$$

   mivel a WALD egyenlőségből: ha x_i, azonos eloszlású v.v., η v.v.

$$\mathbf{E}(\textstyle\sum_{i=1}^{\eta} x_i) = \mathbf{E}(\eta)\mathbf{E}(x)$$

5. a Little formulából: $\mathbf{E}(X_w) = \lambda\mathbf{E}(W)$, ezért

$$\mathbf{E}(W) = \mathbf{E}(\gamma') + \lambda\mathbf{E}(W)\mathbf{E}(x) = \mathbf{E}(\gamma') + \rho\mathbf{E}(W)$$

6. Mivel $\mathbf{E}(\gamma') = 0\ \mathbf{P}(X(t) = 0) + \mathbf{E}(\gamma)\mathbf{P}(X(t) > 0)$:

$$\mathbf{E}(\gamma') = \frac{\mathbf{E}(x^2)}{2\mathbf{E}(x)}\lambda\mathbf{E}(x) = \frac{\lambda\mathbf{E}(x^2)}{2}$$

amely kifejezésekből:

$$\mathbf{E}(W) = \frac{\mathbf{E}(\gamma')}{1-\rho} = \frac{\lambda\mathbf{E}(x^2)}{2(1-\rho)} = \lambda(\mathbf{E}(x))^2\frac{1+C_x^2}{2(1-\rho)}$$

azaz

$$\mathbf{E}(W) = \rho\mathbf{E}(x)\frac{1+C_x^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho}\mathbf{E}(x)\frac{1+C_x^2}{2} \tag{3.67}$$

Pollaczek-Hincsin várhatóérték formula

7. a várható rendszeridő: $\mathbf{E}(T)$

$$\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(x) + \mathbf{E}(W) = \mathbf{E}(x) + \frac{\rho}{1-\rho}\mathbf{E}(x)\frac{1+C_x^2}{2} \tag{3.68}$$

8. példák:

   - M/D/1 rendszer: $\mathbf{E}(x) = m$, $\mathbf{E}(x^2) = m^2$, $C_x^2 = 0$

     $$\mathbf{E}(W) = \frac{\rho}{2(1-\rho)}\mathbf{E}(x)$$

   - M/M/1 rendszer: $\mathbf{E}(x) = m$, $\mathbf{E}(x^2) = 2m^2$, $C_x^2 = 1$

     $$\mathbf{E}(W) = \frac{\rho}{1-\rho}\mathbf{E}(x)$$

3.9.2. M/G/1 rendszerbeli igények számának várható értéke

1. kétdimenziós folyamat, egyik dimenzió folytonos állapotterű

   $$X(t) \triangleq \text{a rendszerbeli igények száma a } t \text{ időpontban}$$

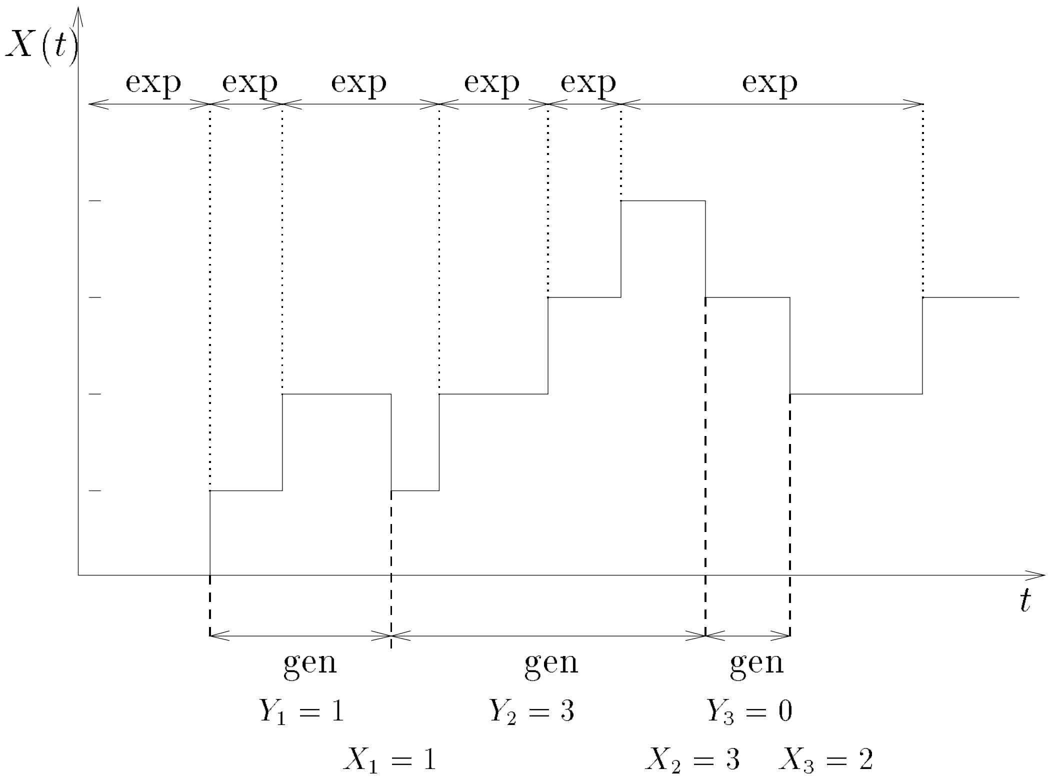
   $$Z(t) \triangleq \text{a hátralévő munka a } t \text{ időpontban}$$

2. probléma feloldása: vegyünk speciális időpontokat
   (pl. kiszolgálás kezdete vagy vége)
   Konkrétan az igények távozási időpontjában nézzük a rendszert
   — (*beágyazott Markov lánc*)

3. jelölések:

$$X_n \stackrel{\triangle}{=} \text{hátrahagyott igények száma az } n. \text{ igény távozásakor}$$

$$Y_n \stackrel{\triangle}{=} \text{az érkező igények száma az } n. \text{ igény kiszolgálása alatt}$$



4. evolúciós egyenlet:

$$X_{n+1} = (X_n - 1)^+ Y_{n+1}$$

vagy másképpen

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n + Y_{n+1} - 1 & \text{ha } X_n > 0 \\ Y_{n+1} & \text{ha } X_n = 0 \end{cases} \tag{3.69}$$

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} - \chi(X_n) \tag{3.70}$$

ahol

$$\chi(X) = \begin{cases} 0 & \text{üres rendszer} \\ 1 & \text{nem üres rendszer} \end{cases} \tag{3.71}$$

s amelyből jól látszik, hogy az $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ sorozat kielégíti a Markov tulajdonságot.

5. a sorhossz várható értéke

$$\mathbf{E}(X_{n+1}) = \mathbf{E}(X_n) + \mathbf{E}(Y_{n+1}) - \mathbf{E}(\chi(X_n)) \tag{3.72}$$

amennyiben a határértékek léteznek:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(X_{n+1}) = \mathbf{E}(X) \tag{3.73}$$

továbbá $\mathbf{E}(Y_n) \to \mathbf{E}(Y)$ és $\mathbf{E}(\chi(X_n)) \to \mathbf{E}(\chi(X))$. Így

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y) - \mathbf{E}(\chi(X)) \tag{3.74}$$

ahonnan

$$\mathbf{E}(Y) = \mathbf{E}(\chi(X)) = \rho \tag{3.75}$$

mivel a rendszer foglaltságának indikátora:

$$\mathbf{E}(\chi(X)) = 0\mathbf{P}(X = 0) + 1\mathbf{P}(X > 0) = \mathbf{P}(\text{kiszolgáló foglalt}) = \rho \tag{3.76}$$

Négyzetre emelve a 3.70 kifejezés mindkét oldalát:

$$X_{n+1}^2 = X_n^2 + Y_{n+1}^2 + \chi(X_n) + 2X_n Y_{n+1} - 2X_n\chi(X_n) - 2Y_{n+1}\chi(X_n) \tag{3.77}$$

majd képezve a várható értékeket

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big(X_{n+1}^2\Big) &= \mathbf{E}(X_n^2) + \mathbf{E}\Big(Y_{n+1}^2\Big) + \mathbf{E}(\chi(X_n)) + \\ &\quad 2\mathbf{E}(X_n)\mathbf{E}(Y_{n+1}) - 2\mathbf{E}(X_n) - 2\mathbf{E}(Y_{n+1})\mathbf{E}(\chi(X_n)) \end{aligned}$$

s végül az $n \to \infty$ határértékeket képezve:

$$0 = \mathbf{E}(Y^2) + \mathbf{E}(Y) + 2\mathbf{E}(X)\mathbf{E}(Y) - 2\mathbf{E}(X) - 2(\mathbf{E}(Y))^2 \tag{3.78}$$

$$2(1 - \mathbf{E}(Y))\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y^2) + \mathbf{E}(Y) - 2(\mathbf{E}(Y))^2 \tag{3.79}$$

$$\mathbf{E}(X) = \mathbf{E}(Y) + \frac{\mathbf{E}(Y^2) - \mathbf{E}(Y)}{2\,(1 - \mathbf{E}(Y))} \tag{3.80}$$

Tudjuk, hogy $\mathbf{E}(Y) = \rho = \lambda\mathbf{E}(x)$. Végül:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y^2) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\mathbf{P}(Y = k) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda x}\, b(x)\, dx \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} k^2\frac{(\lambda x)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda x}\, b(x)dx \\ &= \int_0^\infty \sum_{k=1}^{\infty} (k\,(k-1) + k)\, \frac{(\lambda x)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda x}\, b(x)dx \\ &= \int_0^\infty \Big(\lambda^2 x^2 + \lambda x\Big)\, b(x)\, dx = \lambda^2\mathbf{E}(x^2) + \lambda\mathbf{E}(x) \end{aligned} \tag{3.81}$$

$$\mathbf{E}(X) = \rho + \frac{\lambda^2 \mathbf{E}(x^2)}{2(1-\rho)} \tag{3.82}$$

s figyelembe véve, hogy

$$C_x^2 = \frac{\mathbf{E}(x^2) - (\mathbf{E}(x))^2}{(\mathbf{E}(x))^2} \tag{3.83}$$

a következő eredményt nyerjük:

$$\mathbf{E}(X) = \rho + \rho^2 \frac{(1 + C^2)}{2(1-\rho)} \tag{3.84}$$

amely ugyancsak Pollaczek-Hincsin-féle várhatóérték formula néven ismert.

6. az időparaméterek:

$$\bar{T} = \frac{\mathbf{E}(X)}{\mathbf{E}(\lambda)} = \frac{\mathbf{E}(X)}{\lambda} = \mathbf{E}(x) + \rho \mathbf{E}(x) \frac{1 + C^2}{2(1-\rho)} \tag{3.85}$$

amely eredmény összevethető az előző alfejezet megfelelő végeredményével.

7. Alkalmazva az $M/M/1$ rendszerre: $C^2 = 1$

$$\mathbf{E}(X) = \rho + \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{\rho}{1-\rho} \tag{3.86}$$

8. Alkalmazva az $M/D/1$ rendszerre: $C^2 = 0$

$$\mathbf{E}(X) = \rho + \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{\rho^2}{2(1-\rho)} \tag{3.87}$$

9. 7. példa: **Megoldások II.:**

6.a–6.(a)ii.. Az $M/G/1$-es rendszerekre vonatkozó eredményből:

$$\rho = \lambda \mathbf{E}(x) = \lambda(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2})$$

6.c–6.(a)ii.. Az M/G/1 sorra vonatkozó eredményekből:

$$\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(x) + \frac{\rho \mathbf{E}(x)(1 + C_b^2)}{2(1-\rho)}, \quad \mathbf{E}(X) = \lambda \mathbf{E}(T),$$

ahol

$$\mathbf{E}(x) = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} \text{ és } C_b^2 = \frac{\sigma_b^2}{(\mathbf{E}(x))^2} = \frac{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2}}{(\mathbf{E}(x))^2}.$$

6.e–6.(a)i..

$$\mathbf{E}(x) = \frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = 25 \text{ sec}$$

$$\rho = \lambda \mathbf{E}(x) = \lambda(\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}) = \frac{1}{50}(20+5) = \frac{1}{2},$$

$$C_b^2 = \frac{\sigma_b^2}{(\mathbf{E}(x))^2} = \frac{\frac{1}{\mu_1^2} + \frac{1}{\mu_2^2}}{(\mathbf{E}(x))^2} = 425/625 = 17/25.$$

$$\mathbf{E}(T) = \mathbf{E}(x) + \frac{\rho \mathbf{E}(x)(1 + C_b^2)}{2(1-\rho)} = 46 \text{ sec}.$$

3.9.3. M/G/1 rendszerbeli igények számának határeloszlása

1. evolúciós egyenlet a korábbiaknak megfelelően:

$$X_{n+1} = X_n + Y_{n+1} - \chi(X_n) \tag{3.88}$$

2. az átmenetvalószínűségeket kifejezve az evolúciós egyenletből:

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \mathbf{P}(Y_{n+1} - \chi(X_n) = j - i) \tag{3.89}$$

Jól látható, hogy ekkor az $\{X_n, n = 0, 1, \cdots\}$ diszkrét idejű Markov láncot alkot, ami másképpen írva:

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = \begin{cases} \mathbf{P}(Y_{n+1} - 1 = j - i) & \text{ha } i > 0 \\ \mathbf{P}(Y_{n+1} = j - i) & \text{ha } i = 0 \end{cases} \tag{3.90}$$

A teljes valószínűség tétel alkalmazásával:

$$\mathbf{P}(Y_n = k) = \int_0^\infty \mathbf{P}(Y_n = k \mid x_n = x)\, b(x)\, dx \tag{3.91}$$

s figyelembe véve, hogy az érkezési folyamat Poisson

$$\mathbf{P}(Y_n = k) = \int_0^\infty \frac{(\lambda x)^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda x}\, b_n(x)\, dx \stackrel{\triangle}{=} y_k \tag{3.92}$$

Mátrixos alakban felírva az átmenetvalószínűségeket

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & p_k & \cdots \\ y_0 & y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_k & \cdots \\ 0 & y_0 & y_1 & y_2 & \cdots & y_{k-1} & \cdots \\ 0 & 0 & c_0 & y_1 & \cdots & y_{k-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \tag{3.93}$$

3. az egyensúlyi egyenletek:

$$p_0 = p_0 p_{00} + p_1 p_{10} = (p_0 + p_1) y_0$$

$$p_k = p_0 p_{0k} + \sum_{i=1}^{k+1} p_i p_{i,k} = p_0 y_k + \sum_{i=1}^{k+1} p_i y_{k+1-i}$$

Bevezetve az alábbi z-transzformáltakat:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \quad Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k \tag{3.94}$$

beszorozva minden sort z^k-val, s elvégezve ezen kifejezések összegzését:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_0 y_k z^k + p_1 y_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{k+1} p_i y_{k+1-i} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} p_0 y_k z^k + \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{k+1} p_i y_{k+1-i} z^k =$$

$$p_0 Y(z) + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \sum_{k=i-1}^{\infty} y_{k+1-i} z^k = p_0 Y(z) + z^{-1} \sum_{i=1}^{\infty} p_i \sum_{l=0}^{\infty} y_l z^l = p_0 Y(z) + z^{-1}(P(z) - p_0) Y(z)$$

ahonnan

$$zP(z) - Y(z)P(z) = p_0 Y(z)(z-1)$$

és

$$P(z) = \frac{p_0 Y(z)(1-z)}{Y(z) - z} \tag{3.95}$$

Innen, figyelembe véve hogy $\lim_{z \to 1} P(z) = 1$, a L'Hospital szabály alkalmazásával:

$$1 = p_0 \frac{-Y(z) + (1-z)Y'(z)}{Y'(z) - 1} \Big|_{z=1}$$

ahonnan

$$p_0 = 1 - Y'(z) = 1 - \rho \tag{3.96}$$

s így

$$P(z) = \frac{(1-\rho) Y(z)(1-z)}{Y(z) - z} \tag{3.97}$$

4. $Y(z)$ meghatározása a kiszolgálási idő eloszlása ($b(t)$) alapján:

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} y_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{t=0}^{\infty} \mathbf{P}(Y = k \mid x = t) b(t) dt z^k =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_{t=0}^{\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t}b(t)dt z^k = \int_{t=0}^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda(1-z)t}b(t)dt = b^*(\lambda(1-z))$$

ahonnan

$$Y(z) = b^*(\lambda(1-z)) \tag{3.98}$$

és

$$P(z) = \frac{(1-\rho)B^*(\lambda(1-z))(1-z)}{B^*(\lambda(1-z))-z} \tag{3.99}$$

amely Pollaczek-Hincsin-féle transzformált formula néven ismert.

5. Példa: M/M/1 sor

$$b(x) = \mu\mathrm{e}^{-\mu x},\quad b^*(s) = \frac{\mu}{s+\mu},\quad b^*(\lambda(1-z) = \frac{\mu}{\lambda-\lambda z+\mu}$$

$$P(z) = \frac{(1-\rho)\mu(1-z)}{\mu-\lambda z+\lambda z^2-\mu z} = \frac{(1-\rho)\mu(1-z)}{(\mu-\lambda z)(1-z)} = \frac{1-\rho}{1-\rho z} \tag{3.100}$$

s ahonnan: $p_k = (1-\rho)\rho^k$

3.9.4. Kitekintés

1. a születési-halálozási folyamatok korlátainak feloldása
   - lépcsős érkezés, kiszolgálás, Phase-type, M/G/1
   - csoportos érkezés, kiszolgálás (általános Markov-foly.)
   - nem exponenciális érkezési időköz, kiszolgálás (G/M/1, G/G/1)
   - (csoportos) Markovi érkezési folyamat (BMAP)
   - mátrix geometrikus megoldás
2. több kiszolgálási egység (sorbanállási hálózat)
   - Burke tétel
   - reverzibilitás
   - nyilt és zárt sorbanállási hálózat
   - szorzat alakú megoldás
   - mean value analysis, decomposition

3. új kihívások: példák

   - többféle forgalom keveréke (B-ISDN)
   - hosszú idejű függőség
   - önhasonlóság

4. új válaszok:

   - folyadékmodellek
   - fraktál, káosz modellek

4. fejezet

Hálózatok forgalmi modellezése

4.1. Veszteségmentes hálózatok forgalmi elemzése

4.1.1. Burke tétel és következményei

1. Burke tétel: az $M/M/m$ sor kimeneti folyamata is Poisson.

   - Az $M/M/1$ sorra megmutatva:

     $$D^*(s) = (1 - p_0^{(d)})\frac{\mu}{s+\mu} + p_0^{(d)}\ \frac{\mu}{s+\mu}\ \frac{\lambda}{s+\lambda} \tag{4.1}$$

     ahol $d(t), D^*(t)$ rendre a távozási időközök eloszlásának sűrűségfüggvénye és annak Laplace transzformáltja.

     $$D^*(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda} \tag{4.2}$$

     és

     $$d(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}, \tag{4.3}$$

     azaz a távozási időközök is exponenciális eloszlásúak λ paraméterrel.

   - Következmény: két sorbakapcsolt $M/M/1$-es kiszolgálóra legyenek az állapotok a következőképpen jelezve: (k_1, k_2). Ekkor feltéve, hogy

     $$\frac{\lambda}{\mu_1} < 1 \qquad \frac{\lambda}{\mu_2} < 1 \tag{4.4}$$

     teljesül, azaz a rendszer stabil, ha:

     $$\lambda < \min(\mu_1, \mu_2). \tag{4.5}$$

- Az állapotegyenletrendszer:

$$\begin{cases} \lambda p_{0,0} & = \mu_2 p_{0,1} & \\ (\lambda+\mu_2)p_{0,k_2} & = \mu_1 p_{1,k_2-1} + \mu_2 p_{0,k_2+1} & k_2 \geq 1 \\ (\lambda+\mu_1)p_{k_1,0} & = \lambda p_{k_1-1,0} + \mu_2 p_{k_1,1} & k_1 \geq 1 \\ (\lambda+\mu_1+\mu_2)p_{k_1,k_2} & = \lambda p_{k_1-1,k_2} + \mu_1 p_{k_1+1,k_2-1} + & \\ & \quad +\mu_2 p_{k_1,k_2+1} & k_1,k_2 \geq 1 \end{cases} \tag{4.6}$$

ahonnan levezethető:

$$p_{k_1,k_2} = \left(1-\frac{\lambda}{\mu_1}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^{k_1}\left(1-\frac{\lambda}{\mu_2}\right)\left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^{k_2} \tag{4.7}$$

és így:

$$p_{k_1,k_2} = p_{k_1} p_{k_2} \tag{4.8}$$

2. Aciklikus hálózatok:

- sorbakapcsolt (tandem) hálózatok általánosítása
- Poisson folyamatok összegzésén és véletlen szétválasztásán alapuló eredmények felhasználásával
- szorzat alakú eredmények:

$$p_{k_1,k_2,\cdots,k_N} = \prod_{i=1}^{N} p_{k_i}$$

4.1.2. Nyílt (Jackson típusú) sorbanállási hálózatok

1. Jellemzők[1]:

- a hálózat N csomópontot tartalmaz
- az i. csomópontban m_i kiszolgáló egység működik
- a kiszolgáló egységek kiszolgálási ideje az i. csomópontban, exponenciális eloszlású, μ_i paraméterrel,
- az i. csomópontba kívülről érkező igények érkezési folyamata γ_i paraméterű Poisson folyamat

[1] Jackson, J.R."Jobshop-like Queueing Systems," *Management Science 10*, 1 (1963), 131-142.

- az i. csomópontban befejezett kiszolgálás után az igény a j. csomópontba lép át $r_{i,j}, i,j = 1,2,\cdots,N$ valószinűséggel, míg a rendszerből való eltávozás valószinűsége:

$$1 - \sum_{k=1}^{N} r_{i,k} \qquad i,j = 1,2,\cdots,N \tag{4.9}$$

- mivel a hálózat nem aciklikus, az egyes csomópontok eredő érkezési folyamata nem Poisson, ugyanakkor az i. csomópontra kifejezhető az átlagos eredő érkezési intenzitás:

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^{N} \lambda_j \, r_{j,i} \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{4.10}$$

2. A stabilitás feltétele:

$$\lambda_i < m_i \mu_i \quad i = 1,2,\cdots,N \tag{4.11}$$

3. Az állapotok értelmezése:

$$\boldsymbol{N} = (k_1, k_2, \cdots, k_N), \tag{4.12}$$

4. amely jelölésekkel a jellegzetes állapotok:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{N} &= (k_1,\cdots,k_i,\cdots,k_j,\cdots,k_N)\\
\boldsymbol{N}_{i,0} &= (k_1,\cdots,k_i+1,\cdots,k_j,\cdots,k_N)\\
\boldsymbol{N}_{0,j} &= (k_1,\cdots,k_i,\cdots,k_j-1,\cdots,k_N)\\
\boldsymbol{N}_{i,j} &= (k_1,\cdots,k_i+1,\cdots,k_j-1,\cdots,k_N)
\end{aligned} \tag{4.13}$$

   ahol $k_j - 1 \geq 0$,

5. és amely jelölésekkel a jellegzetes állapotátmenetek:

   - $\boldsymbol{N}_{0,j} \to \boldsymbol{N}$:
     egy igény érkezik kívülről a j. csomóponthoz (γ_j intenzitással), és ezzel megnő a csomópontban az igények száma $k_j - 1$-ről k_j-re,
   - $\boldsymbol{N}_{i,0} \to \boldsymbol{N}$:
     egy igény távozik a hálózaton kívülre az i. csomópontból ($r_{i,0} = 1 - \sum_{j=1}^{N} r_{i,j}$ valószínűséggel és $\alpha_i(k_i+1)\mu_i$ intenzitással), és ezzel lecsökken az igények száma $k_i + 1$-ről k_i-re,

- $\boldsymbol{N}_{i,j} \to \boldsymbol{N}$:
  egy igény távozik az i. csomópontból a j. csomópontba ($r_{i,j}$ valószínűséggel és $\alpha_i(k_i+1)\mu_i$ intenzitással), és ezzel egyrészt lecsökken az igények száma az i. csomópontban k_i+1-ről k_i-re, másrészt megnő az igények száma a j. csomópontban k_j-1-ről k_i-re,

ahol $\alpha_i(k_i)$-re:

$$\alpha_i(k_i) = \min\{k_i, m_i\}$$

6. Az $\boldsymbol{N}$. állapotra:

- az egyensúlyi egyenlet:

$$p_{\boldsymbol{N}}\left[\sum_{i=1}^{N}\gamma_i + \sum_{i=1}^{N}\alpha_i(k_i)\,\mu_i\right] = \sum_{i=1}^{N} p_{\boldsymbol{N}_{i,0}}\alpha_i(k_i+1)\,\mu_i\,r_{i,0} + \\ + \sum_{i=1}^{N} p_{\boldsymbol{N}_{0,i}}\,\gamma_i\,\delta_i(k_i) + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} p_{\boldsymbol{N}_{i,j}}\,\alpha_i(k_i+1)\,\mu_i\,r_{i,j} \tag{4.14}$$

  $\delta_i(k_i)=1$, ha $k_i \geq 1$, és

- amely megoldásával Jackson megmutatta, hogy az alábbi szorzat alakú eredmémy teljesül:

$$p_{\boldsymbol{N}} = p_{k_1,\cdots,k_N} = p_{1,k_1}p_{2,k_2}\cdots p_{N,k_N} \tag{4.15}$$

  ahol

$$p_{i,k_j} = \begin{cases} p_{i,0}\left(\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_j}\dfrac{1}{k_j!} & 0 \leq k_j \leq m_i \\ \\ p_{i,0}\left(\dfrac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_j}\dfrac{1}{m_i!}\,m_i^{m_i-k_j} & k_j \geq m_i \end{cases} \tag{4.16}$$

- az alábbi normalizálással:

$$\sum_{k_j=0}^{\infty} p_{i,k_j} = 1 \tag{4.17}$$

4.1.3. Zárt - Gordon-Newell típusú - sorbanállási hálózatok

1. Jellemzők:

   - hasonlóak a Jackson típusúakhoz, DE
   - $\gamma_i = 0, \ \forall i$
   - amely alapján:

$$\sum_{i=1}^{N} k_i = \hat{k} \tag{4.18}$$

   - az egyetlen lehetséges jellegzetes állapotátmenet: $\boldsymbol{N}_{i,j} \to \boldsymbol{N}$: egy igény távozik az i. csomópontból a j. csomópontba ($r_{i,j}$ valószínűséggel és $\alpha_i(k_i+1)\mu_i$ intenzitással), és ezzel egyrészt lecsökken az igények száma az i. csomópontban $k_i + 1$-ről k_i-re, másrészt megnő az igények száma a j. csomópontban $k_j - 1$-ről k_i-re,

2. Az $\boldsymbol{N}$. állapotra:

   - az egyensúlyi egyenlet:

$$p_{\boldsymbol{N}} \left[\sum_{i=1}^{N} \alpha_i(k_i)\ \mu_i \right] = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} p_{\boldsymbol{N}_{i,j}}\ \alpha_i(k_i+1)\ \mu_i\ r_{i,j} \tag{4.19}$$

   - amely megoldásával Gordon és Newell megmutatta, hogy az alábbi szorzat alakú eredmémy teljesül:

$$p_{\boldsymbol{N}} = \frac{1}{G} \prod_{i=1}^{N} h_i(k_i) \tag{4.20}$$

   ahol

$$G = \sum_{\boldsymbol{N}} \prod_{i=1}^{N} h_i(k_i) \tag{4.21}$$

   - a $h_i(k_i)$ függvényekre:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j\ r_{j,i} \quad i = 1, \cdots, N \tag{4.22}$$

   amely nem szolgáltat egyértelmű megoldást, de feltéve $\lambda_1 = 1$-et, az alábbihoz juthatunk:

$$\Lambda = (1, V_2, \cdots, V_N) \tag{4.23}$$

   ahol $V_i = \lambda_i / \lambda_1$.

4.1.4. BCMP hálózatok

A szorzat-alakú megoldású hálózatok általánosítása: BCMP
(Baskett, Chandy, Muntz és Palacios-Gomez — 1975).

1. Igényosztályok: több lehetséges igénycsoport, kiszolgálás után megengedett az osztályváltás:
$$\boldsymbol{P} = [p_{i,r;j,s},\ i,j \leq M,\ r,s \leq R] \tag{4.24}$$
ahol az átmenetvalószínűség jelentése, hogy az r. osztályhoz tartozó igény az i. csomópontban történt kiszolgálás után átlép az s. osztályba és a j. csomópontba.

2. Kiszolgálási elvek:

   (a) A kiszolgálás elve FCFS.
   Valamennyi igényt ugyanolyan paraméterű exponenciális eloszlás szerint szolgálnak ki függetlenül az igényosztálytól. A kiszolgálás intenzitása függhet a csomópontban lévő összes igény számától.

   (b) A kiszolgálás elve PS.
   A különböző osztályok kiszolgálási idő eloszlása különbözhet, de mindegyiké racionális Laplace transzformálttal kifejezhető.

   (c) A kiszolgálás LCFS megszakító-megőrző (preemptív-resume) elvvel.
   A különböző osztályok kiszolgálási idő eloszlása különbözhet, de mindegyiké racionális Laplace transzformálttal kifejezhető.

   (d) Minden igénynek külön kiszolgálója van.
   A különböző osztályok kiszolgálási idő eloszlása különbözhet, de mindegyiké racionális Laplace transzformálttal kifejezhető.

3. Egyensúlyi eloszlással rendelkező hálózatra (ld. stabil Markov lánc):

   - az i. csomópontra:
   $$\underline{N_i} = (N_{i,1}, N_{i,2}, \cdots, N_{i,R}) \tag{4.25}$$
   - a hálózat állapotvalószínűségvektora:
   $$\boldsymbol{N} = (\underline{N}_1, \underline{N}_2, \cdots, \underline{N}_M) \tag{4.26}$$

4. A hálózat lehet nyílt vagy zárt.

   - Nyílt hálózatra:
   $$\lambda_{i,r} = \gamma_{i,r} + \sum_{j=1}^{M} \sum_{s=1}^{R} \lambda_{j,s}\, p_{j,s;i,r} \qquad i,j = 0,1,2,\cdots,M \tag{4.27}$$

- Zárt hálózatra:

$$\sum_{i=1}^{M} \sum_{r} N_{i,r} = \hat{N}_q \tag{4.28}$$

5. Az eredmény szorzat alakú:

$$p(\boldsymbol{N}) = \frac{1}{G} \prod_{i=1}^{M} g_i(\underline{N_i}) \tag{4.29}$$

ahol G egy normalizációs konstans.

Egy adott csomópontra:

$$N_i = \sum_{r=1}^{R} N_{i,r},$$

míg $g_i(\underline{N_i})$ az alábbi alakú:

$$g_i(\underline{N_i}) = \begin{cases} N_i! \prod_{r=1}^{R} \frac{1}{N_{i,r}!} (V_{i,r})^{N_{i,r}} \left(\frac{1}{\mu_i}\right)^{N_i} & \text{az a) kiszolgálási típusra} \\ N_i! \prod_{r=1}^{R} \frac{1}{N_{i,r}!} \left(\frac{V_{i,r}}{\mu_{i,r}}\right)^{N_{i,r}} & \text{a b) és c) kiszolgálási típusra} \\ \prod_{r=1}^{R} \frac{1}{N_{i,r}!} \left(\frac{V_{i,r}}{\mu_{i,r}}\right)^{N_{i,r}} & \text{a d) kiszolgálási típusra} \end{cases} \tag{4.30}$$

és ahol $V_{ir} = \lambda_{ir}/\lambda_{1r}$ a normalizált érkezési intenzitás.

4.1.5. Nem szorzat alakú hálózatok rekurzív megoldása

1. Alapesetek:

- A/ típus: egy ismeretlen input, ismert adott és más input állapotvalószínűség (Robertazzi, Fig. 3.22)
- B/ típus: ismeretlen aktuális, ismert input állapotvalószínűségek, (Robertazzi, Fig. 3.23)

- A/ típus: két veszteséges sor tandem kapcsolata: (Robertazzi, Fig. 3.24)
- A/ típus: egy ISDN protokoll: (Robertazzi, Fig. 3.26)
- B/ típus: egy Window Flow Control protokoll: (Robertazzi, Fig. 3.28)

4.1.6. Korlátok

1. Veszteségmentesség
2. Speciális érkezési és kiszolgálási folyamatok
3. Folytonos idejű folyamatok — léteznek diszkrét idejű kiterjesztések is!

4.2. Veszteséges hálózatok forgalmi elemzése

4.2.1. Forgalmi jellemzők

1. CBR források jellemzése:
   - forgalmi jellemzők
     - átlagos érkezési intenzitás: $\bar{\lambda}$
     - várható kiszolgálási idő: $1/\bar{\mu}$
     - a felajánlott forgalom $A = \bar{\lambda}/\bar{\mu}$ Erlang
   - hívásjellemzők
     - A_i: csúcs bitsebesség
2. VBR források jellemzése:
   - forgalmi jellemzők
     - átlagos érkezési intenzitás: $\bar{\lambda}$
     - várható kiszolgálási idő: $1/\bar{\mu}$
     - a felajánlott forgalom $A = \bar{\lambda}/\bar{\mu}$ Erlang
   - hívásjellemzők
     - A_i: csúcs bitsebesség
     - $\bar{A}_i$: átlagos bitsebesség vagy $A_i/\bar{A}_i$ csúcs és átlagos bitsebesség arány
     - várható börsztidő
     - **effektív sávszélesség modellek**: Hui és Kelly, Lindberger, Tidblom, Guerin

4.2.2. Hívásblokkolás egy link esetén

1. Egy forgalomosztály

- Feltételezések:
  - a hívások egy szolgáltatáshoz tartoznak
  - véletlenszerűen érkeznek és egymástól függetlenek (exponenciális érkezési idő eloszlás λ paraméterrel)
  - az összeköttetések tartásideje exponenciális eloszlású μ paraméterrel
  - a felajánlott forgalom $A = \lambda/\mu$ Erlang
  - teljes elérhetőségűek a nyalábok
- forgalmi modell: $M/M/N/N$ rendszer, amelyre
  - a blokkolás mértéke (idő- és hívás-torlódás) — az Erlang-B képletből:

$$E(N, A) = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{j=0}^{N} \frac{A^i}{i!}} \tag{4.31}$$

- rekurzív számítás:

$$E(n, A) = \frac{A \cdot E(n-1, A)}{n + A \cdot E(n-1, A)}, \quad n = 1, 2, ..., N \tag{4.32}$$

  ahol $E(0, A) = 1$.
- a nagyobb nyaláb előnyösebb a bővítés szempontjából, azaz állandó blokkolás mellett kevesebb áramkörrel kell bővíteni:

$$N(A_1 + A_2, B) < N(A_1, B) + N(A_2, B)$$

- a B-vel paraméterezett görbesereg bizonyos A érték felett egyenesekkel jól közelíthető:

$$N \approx \frac{A}{a_0} + N_0 \tag{4.33}$$

  ahol a_0 és N_0 a B-től függ.

—

B	N tartomány			
%	12..120		60..600	
	a_0	N_0	a_0	N_0
0.1	0.830	9.53	0.929	18.77
1	0.905	7.25	0.973	13.40
10	1.083	3.89	1.106	5.59

@

Ha $N > A$, a következő egyenlőtlenség teljesül (Chernoff korlát):

$$B = E(N, A) \leq \left(\frac{A}{N}\right)^N e^{N-A}$$

- a forgalom csúcsossági tényezője:

$$Z := V/M = 1,$$

  ahol $M = A$ a felajánlott forgalom átlagos értéke, V a forgalom varianciája (szórásnégyzet)

- a csúcsossági tényező értéke:
  - $Z = 1$: véletlen (felajánlott) forgalom
  - $Z < 1$ az átvitt forgalom
  - $Z > 1$ csúcsos forgalom
- a túlcsordult forgalom jellemzői az $M/M/N/N$ rendszer esetén:
  - várható értéke: $U = E(N, A) \cdot A$
  - varianciája:

$$V = U\left(1 - U + \frac{A}{N + 1 + U - A}\right) \tag{4.34}$$

2. Több forgalomosztály

- Feltételezések:
  - legyen C a link (illetve VPC) kapacitása
  - a link kapacitását S számú szolgáltatás együttesen használja
  - az s. szolgáltatás forgalma a_s, sávszélességigénye r_s $(s = 1, ..., S,\ \mathbf{r} = (r_1, ..., r_S))$
- Forgalmi modell:
  - n_s a VPC-n létrehozott s. szolgáltatáshoz tartozó hívások száma
  - a megengedett állapotok:

$$ST = \{(n_1, ..., n_S) | \sum_{s=1}^{S} n_s r_s \leq C\} \tag{4.35}$$

  - ST_s az olyan állapotok halmaza, amelyekben az s. osztályba tartozó hívás érkezésekor nem kap kiszolgálást:

$$ST_s = \{(n_1, ..., n_S) | C - r_s \leq \sum_{s=1}^{S} n_s r_s \leq C\} \tag{4.36}$$

– több forgalomosztály esetén a hívásblokkolási képlet szorzat alakú, azaz a rendszer állapotvalószínűségei (Kaufman, Kelly):

$$P(n_1, n_2, ..., n_r) = G(ST)^{-1} \prod_{s=1}^{S} \frac{a_s^{n_s}}{n_s!} \tag{4.37}$$

ahol

$$G(ST) = \sum_{(n_1 r_1 + ... + n_S r_S) \in ST} \prod_{s=1}^{S} \frac{a_s^{n_s}}{n_s!} \tag{4.38}$$

- az s. szolgáltatásosztály blokkolási valószínűsége a következő módon határozható meg:

$$b_s = \frac{G(ST_s)}{G(ST)} \tag{4.39}$$

- az állapotvalószínűségek meghatározása számításigényes, különösen akkor, ha a szolgáltatásosztályok száma nagy (az állapotok nagy száma miatt), ezért a blokkolási valószínűség hatékony kiszámítására különböző módszereket dolgoztak ki (Kaufman, Roberts, stb.), de érdekesek a zárt sorbanállási hálózatokra kidolgozott numerikus módszerek (pl. MVA - Mean value Analysis is)

4.2.3. Hívásblokkolás több link esetén

1. Feltételezések:

   - legyen C_j a j. link kapacitása
   - a linkek kapacitását S számú szolgáltatás együttesen használja (több forgalomosztály)
   - véletlenszerűen érkeznek és egymástól függetlenek (exponenciális érkezési idő eloszlás λ_s paraméterrel)
   - az összeköttetések tartásideje exponenciális eloszlású μ_s paraméterrel
   - a felajánlott forgalom $a_s = \lambda/\mu$ Erlang
   - teljes elérhetőségűek a nyalábok
   - az s. szolgáltatás forgalma a_s, sávszélességigénye r_s ($s = 1, ..., S$, $\mathbf{r} = (r_1, ..., r_S)$)
   - fix- és egyutas elvezetés, azaz az összeköttetés útvonala egyértelműen meghatározott

- R_s az s. szolgáltatáshoz tartozó linkek halmaza
- Y_i az i. linken áthaladó utak halmaza

2. Csökkentett terhelésű közelítés — Reduced Load Approximation

- legyen most $r_s = 1$, $\forall s$
- linkszintű veszteség: fix pontos közelítés

$$L_i = B(\sum_{s \in Y_i} \rho_s t_s(j), C_j) \tag{4.40}$$

ahol

$$t_k(j) = \prod_{j \in R_s - \{i\}} (1 - L_j) \tag{4.41}$$

- Az s. osztályú igények eredő vesztesége:

$$B_s \approx 1 - \prod_{j \in R_s} (1 - L_j) \tag{4.42}$$

3. általánosítások:

- többféle sávszélesség
- összetett útvonalválasztás (Whitt, Ross, Girard, Fodor)

5. fejezet

ESETTANULMÁNYOK

5.1. Csomagok továbbítása réselt csatornán

1. speciális bolyongás (diszkrét születési-halálozási folyamat)
   (*végtelen állapottérrel*)

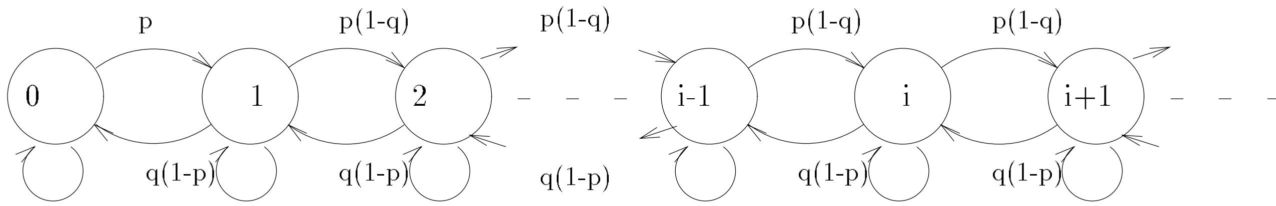
   - érkezési folyamat: minden időrésben p valószínűséggel érkezik 1 csomag és $1-p$ valószínűséggel 0 csomag.
   - kiszolgálás – csomagtovábbítás: ha van továbbítandó csomag, akkor minden időrésben q valószínűséggel továbbít egy csomagot a rendszer és $1-p$ valószínűséggel 0-t.
   - kiszolgálási elv: $FIFO$

2. a rendszerállapot (X_i) az időrések elején a továbbitásra váró csomagok száma.

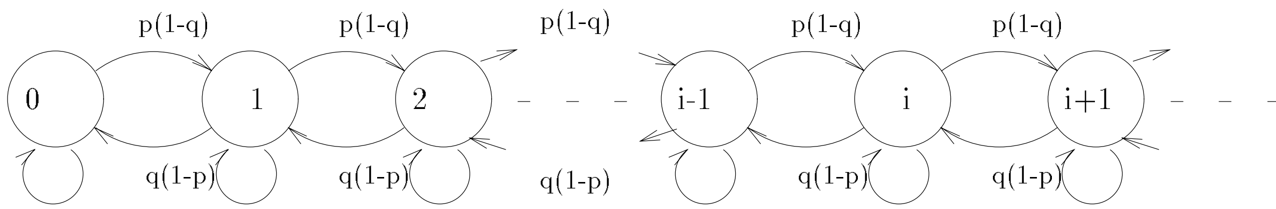
3. működés kétféle értelmezése:
   I. előbb a csomag továbbítás, majd új csomag érkezés,
   II. egy időrésen belül előbb csomag érkezés, majd továbbítás

4. evoluciós egyenlet:
   I. eset: $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1})^+ + Y_{n+1}$
   II. eset: $X_{n+1} = (X_n - V_{n+1} + Y_{n+1})^+$

5. Markov lánc:
   I. eset:



   II. eset:



6. Egyensúlyi eloszlás: (lokális egyensúlyi egyenletek alapján)
   I. eset:
   $p_0 = \frac{q-p}{q}$, $p_i = \left(\frac{p(1-q)}{q(1-p)}\right)^i \frac{q-p}{(1-q)q}$; $i \geq 1$
   II. eset:
   $p_i = \left(\frac{p(1-q)}{q(1-p)}\right)^i \frac{q-p}{(1-p)q}$; $i \geq 0$

7. teljesítményjellemzők:

   - a stabilitás feltétele:
     evolúciós egyenlet alapján: $E(V) > E(Y)$
     Foster kritérium alapján: $q(1-p) > p(1-q) \rightarrow p < q$

- kihasználtság:
I. eset : $\rho = 1 - p_0 = 1 - (1 - \frac{p}{q}) = \frac{p}{q}$
II. eset : $\rho = 1 - p_0(1-p) = 1 - \frac{(q-p)(1-p)}{1-p)q} = \frac{p}{q} \neq 1 - p_0$!!!!
- rendszerben lévő igények számának várható értéke:
I. eset :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i = \frac{p(1-p)}{q-p}$$
II. eset :
$$E(X) = \sum_{i=1}^{\infty} i p_i = \frac{p(1-q)}{q-p}$$
- rendszerben eltöltött idő várható értéke:
I. eset :
$$E(T) = \frac{1}{q} p_0 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i (\frac{i+1}{q} - 1) = \frac{1-p}{q-p}$$
II. eset :
$$E(T) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i (\frac{i+1}{q} - 1) = \frac{1-q}{q-p},$$
amely eredmények mindegyik esetben összhangban vannak a Little-formulával.

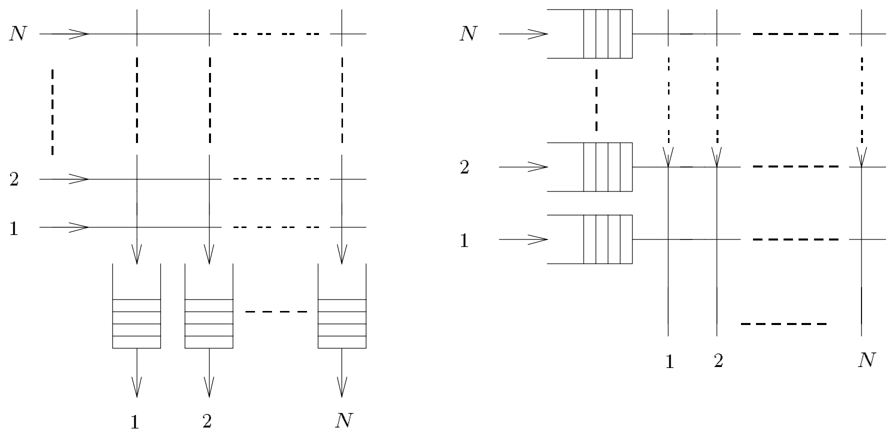
5.2. ATM kapcsoló analízise

5.2.1. ATM kapcsoló modellje

Ezen szakaszban egy $N \times N$-es kapcsológép viselkedésének modellezésével foglalkozunk ATM környezetben. Az átvivendő adat cellákban érkezik, az idő réselt, egy cella egy időrés hosszúságú. A kapcsológép egy adott bemenetén egy időrésben független, minden időrésre azonos eloszlású valószínűségi változó szerint érkezik vagy nem érkezik cella. Az érkezési folyamatot a $Q = \{q_i\}$ vektor írja la, ahol q_i annak a valószínűsége, hogy az i. bemenetre egy adott időrésben cella érkezik.

A beérkező cella az N kimenet valamelyikén kerül továbbításra. Azt, hogy melyik kimenetet célozza meg az adott cella diszkrét eloszlásokkal modellezzük. Ezeket az eloszlásokat a $W = \{w_{ij}\}$ mátrix adja meg, ahol w_{ij} annak a valószínűsége, hogy az i. bemeneten érkező cella a j. kimeneten továbbítandó.

A bejövő és kimenő vonalak sebessége azonos, azaz, ha egy időrésben több cella ugyanazt a kimenetet célozza, ezek közül egy kerülhet átvitelre, a többi várakozásra kényszerül. Kétféle sorbaállítási módszer használható: a várakozási sorok kialakíthatók a kapcsoló bemenetein vagy kimenetein. A két megoldás látható az 5.1. ábrán.

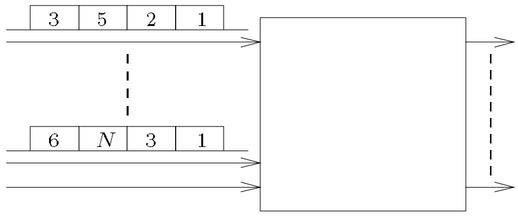


a, sorok a kimeneteken   b, sorok a bemeneteken

5.1. ábra : Bemeneti és kimeneti sorbaállítás

A két megoldás közül a kimeneteken történő sorbaállítás tűnik jobbnak. Ennek oka az, hogy, ha a várakozási sorok a bemeneteken vannak, előfordulhat, hogy egy cella, annak ellenére, hogy az általa megcélzott kimenet szabad, várakozni kényszerül a sorban előtte állók miatt, akik bizonyos kimenetek felszabadulására várnak. Erre látható példa az 5.2. ábrán. Ennek megfelelően mind az átlagos sorhossz, mind az átlagos várakozási idő a kimeneteken történő sorbaállítás esetén alakul kedvezőbben. Valójában a két struktúra közötti választás mégsem egyértelmű, mert a kimeneteken történő sorbaállítás esetén gyorsabb kapcsológépre van szükség. A legrosszab esetben minden bemeneti vonal ugyanazt a kimenetet kívánja elérni, a kimeneti sorbaállítás esetén ilyenkor a kapcsológépnek miden bemenetéről át kell vinnie a cellákat az adott kimenethez tartozó sorba egy időrésen belül. Bemeneti sorbaállításnál legfeljebb egy cellát kell egy irányba továbbítani, kimenetinél N-t.

A következő szakaszban azt az esetet vizsgáljuk, amikor $N = 2$ és a sorok a kapcsoló bemenetén helyezkednek el. Ha a két sor elején álló cella ugyanarra a kimenetre



5.2. ábra : Várakozás a bemeneteken

továbbítandó, a cellák közül 1/2-1/2 valószínűséggel kerül valamelyik átvitelre. Az elemzésre használt Markov-lánc megszerkeszthető más kiszolgálási politikák esetére is, például úgy, hogy ütközés esetén a hosszabb sor elején álló cella haladjon át a kapcsolón.

Továbbá feltételezzük, hogy a cellák áthaladási ideje 0, azaz, ha egy cella érkezésekor a sor üres és a kimenet szabad, az átvitel még ugyanebben az időrésben megtörténik, a cella nem áll be a sorba.

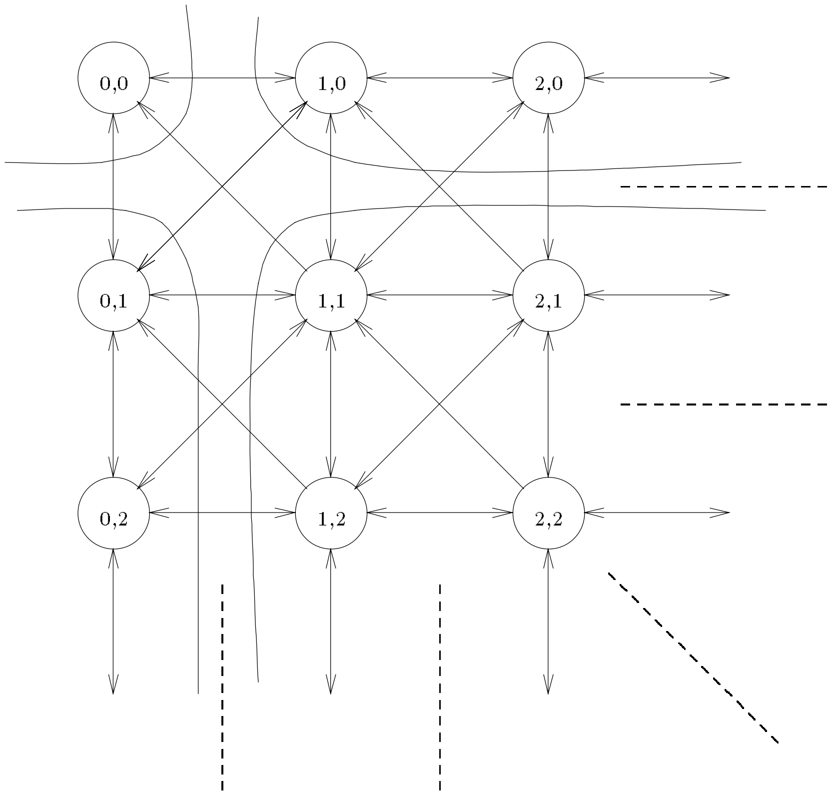
5.2.2. Sorok a bemeneteken

A kapcsoló elemzésére két dimenziós diszkrét idejű Markov-lánc használható. A lánc egy állapotának két eleme a két sor hosszának felel meg. A lánc felépítése az 5.3. ábrán látható. A lánc az állapotátmenetek szempontjából négy részre osztható: mindkét sor üres, az első sor üres, a második sor üres, mindkét sorban várakoznak elemek.

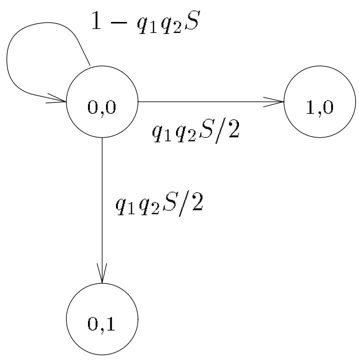
Az 5.4. ábra a (0,0) állapotot mutatja, amikor mindkét sor üres. Az ábran az állapotból kiinduló átmenetek valószínűségei láthatók. Ezen, és a későbbi ábrákon is S jelöli annak a valószínűségét, ha a két továbbítandó cella ugyanazt a kimenetet célozza, azaz $S = w_{11}w_{21} + w_{12}w_{22}$. Ebben a helyzetben a következők történhetnek:

- a következő állapot az (1,0), ha mindkét bemeneten érkezik cella, ezek ugyanarra a kimenetre továbbítandók, és a második bemeneten érkező kerül kiszolgálásra,
- a következő állapot az (0,1), ha mindkét bemeneten érkezik cella, ezek ugyanarra a kimenetre továbbítandók, és az első bemeneten érkező kerül kiszolgálásra,
- ha egy vagy egy cella sem érkezik, a két sor üres marad, azaz a lánc marad (0,0) állapotban.

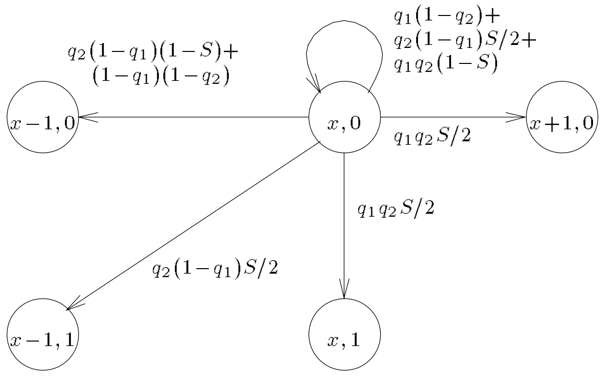
Az 5.5. ábrán azon állapotokból kiinduló átmenetek láthatók, amikor az első sorban várakozik egy vagy több cella, a második sor üres. $(x, 0)$-val jelölve az adott állapotot a lánc a következő állapotokba juthat:



5.3. ábra : A modellezésre használt lánc



5.4. ábra : Üresek a sorok

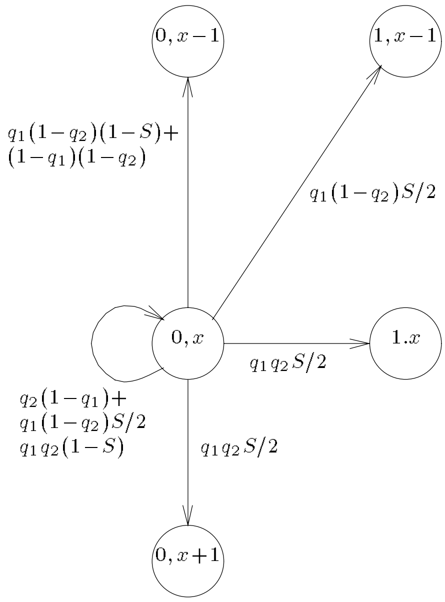


5.5. ábra : A második sor üres

- $(x-1,0)$ a következő állapot, ha
  - csak a második sorba érkezik új igény és nem történik ütközés,
  - egyik sorba sem érkezik új igény,
- a $(x,0)$ állapotban marad a lánc, ha
  - csak az első soron érkezik új cella,
  - ha csak a második soron érkezik új cella, a két igény ütközik és a második sor első eleme kerül átvitelre,
  - mindkét soron érkezik új igény és nem történik ütközés,
- a következő állapot az $(x+1,0)$, ha mindkét soron érkezik új igény, ütközés történik és a második sor első eleme kerül átvitelre,
- az $(x-1,1)$ állapotba jut a rendszer, ha csak a második soron érkezik új cella, a két igény ütközik és az első sor első eleme kerül átvitelre,
- a következő állapot az $(x,1)$, ha mindkét soron érkezik új igény, ütközés történik és a első sor első eleme kerül átvitelre.

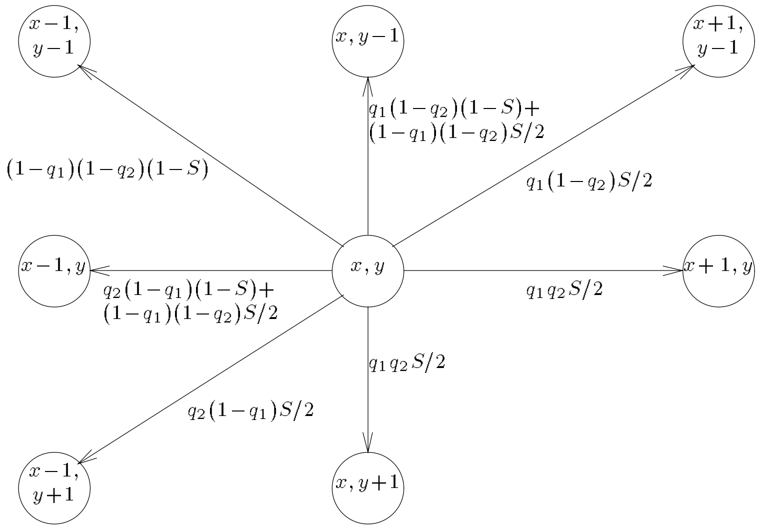
Az az eset, amikor az első sor üres, de a második sorban várakoznak elemek az 5.6. ábrán látható. Egy ilyen állapotból kiinduló átmenetek megegyeznek az előző eset átmeneteivel az első és második sor szerepének felcserélésével.

Az 5.7. ábra mutat egy olyan állapotot, ahol mindkét sorban várakoznak elemek (a helyben maradás valószínűsége nincsen feltüntetve). Az átmenetek a következők:



5.6. ábra : Az első sor üres

- a következő állapot az $(x-1, y-1)$, ha egyik bemeneten sem érkezik cella és nem történik ütközés,
- a következő állapot az $(x, y-1)$, ha
  - csak az első bemeneten történik érkezés és nem történik ütközés,
  - nem jön új cella, ütközés történik, és a második sorban álló cella kerül kiszolgálásra,
- a lánc az $(x+1, y-1)$ állapotba jut, ha csak az első sorra jön új cella, ütközés történik, és a második sorban álló cella kerül kiszolgálásra,
- a következő állapot $(x-1, y)$, ha
  - csak a második bemeten jön új cella, és nem történik ütközés,
  - nem jön új cella, ütközés történik, és a első sorban álló cella kerül kiszolgálásra,
- a lánc helyben marad, ha



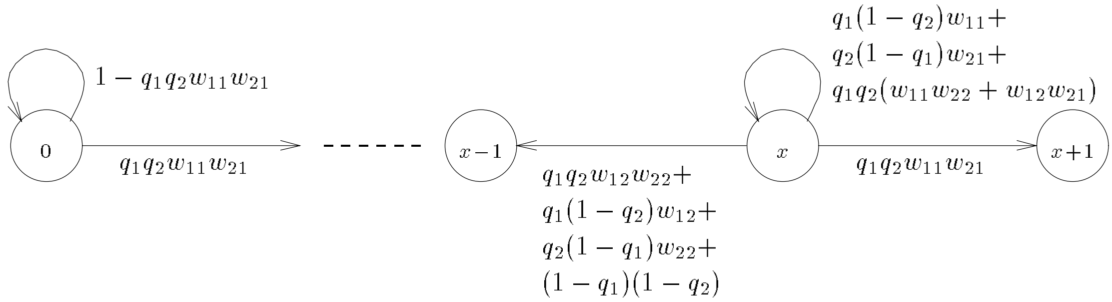
5.7. ábra : Mindkét sorban vannak elemek

  - pontosan egy érkezés történik, a két sor elején álló cellák ütköznek, és azon sor elején álló cella kerül kiszolgálásra, amelyik sorba az új cella jött (ennek valószínűsége: $q_1(1-q_2)S/2 + q_2(1-q_1)S/2$),
  - mindkét bemeneten érkezik cella, és nincs ütközés (ennek valószínűsége: $q_1q_2(1-S)$),

- a következő állapot az $(x+1, y)$, ha mindkét soron érkezik új igény, ütközés történik és a második sor első eleme kerül átvitelre,
- a következő állapot $(x-1, y+1)$, ha csak a második sorra jön új igény, ütkpzés történik, és az első sor elején álló cella halad át a kapcsolón,
- a következő állapot az $(x, y+1)$, ha mindkét soron érkezik új igény, ütközés történik és az első sor első eleme kerül átvitelre.

5.2.3. Sorok a kimeneteken

A kimeneteken történő sorbaállítás esetén az analízis egyszerűbb, az egyik sor viselkedése nem függ attól, hogy hány elem várakozik a másik sorban. A kapcsoló modellezésére ebben az esetben két független Markov-lánc használható.



5.8. ábra : Sor a kimeneteken

Az első kimeneti sor viselkedését modellező lánc látható az 5.8. ábrán. Ha a sor üres a lánc a következő állapotba lép, ha két cella érkezik, és mindkettő az első kimenet felé továbbítandó, egyébként helyben marad. Ha van várakozó igény a következő állapot háromféle lehet:

- a sor hossza eggyel csökken, ha nem érkezik cella a kimenet felé,
- a sor hossza változatlan marad, ha egy cella érkezik a kimenet felé,
- a sor hossza egyel nő, ha két cella érkezik a kimenet felé.

5.2.4. Összehasonlítás

Az egyes sorok várható hossza bemeneti sorbaállításnál a következő képletekkel számítható ki:

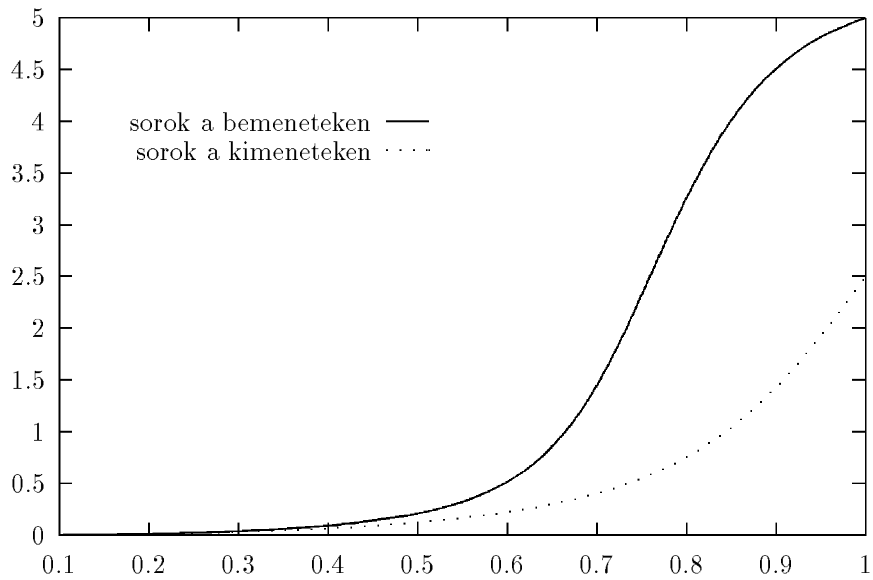
$$E_1 = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} iP_{ij},$$

$$E_2 = \sum_{i\geq 0}\sum_{j\geq 0} jP_{ij},$$

ahol P_{ij} jelöli az (i,j) állandósult állapotbeli valószínűségét. Kimeneti sorbaállításnál:

$$E_1 = \sum_{i\geq 1} iP_{i,1},$$

$$E_2 = \sum_{i\geq 1} iP_{i,2},$$



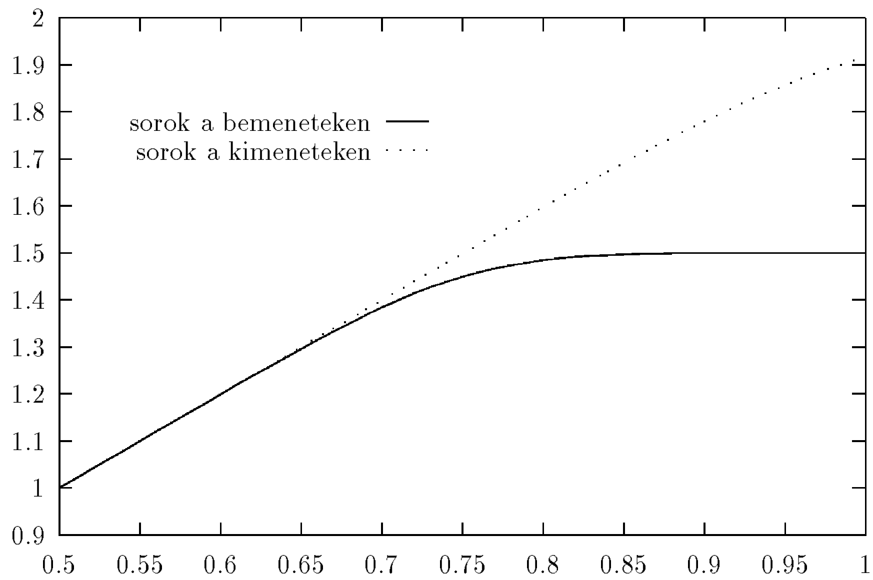
5.9. ábra : Átlagos sorhossz

ahol $P_{i,1}$ ($P_{i,2}$) jelöli az első (második) sor i. állandósult állapotbeli valószínűségét.

Az 5.9. ábra az átlagos sorhosszat mutatja az érkezési valószínűség függvényében a két különböző megvalósítás esetén. A sorok mérete 5 cella tárolására elegendő, $q_1 = q_2, w_{11} = w_{21} = 0.5$.

Számítsuk ki, hogy egy időrésben várhatóan hány cella kerül kiszolgálásra bemeneti sorbaállítás esetén! Ehhez azt kell tudnunk, hogy valamely állapotban állva, a következő időrésben milyen valószínűséggel hány cella kerül átvitelre. Ehhez megint négy részre kell osztjuk az állapotteret. Az átvitel:

$$\begin{aligned}
\delta = P_{00}[1 \times (q_1(1-q_2) + q_2(1-q_1) + q_1q_2S) + 2 \times q_1q_2(1-S)]+ \\
+\sum_{x\geq 1} P_{x0}[1 \times ((1-q_2) + q_2S) + 2 \times q_2(1-S)]+ \\
+\sum_{y\geq 1} P_{0y}[1 \times ((1-q_1) + q_1S) + 2 \times q_1(1-S)]+ \\
+\sum_{x\geq 1, y\geq 1} P_{xy}[1 \times S + 2 \times (1-S)]
\end{aligned}$$



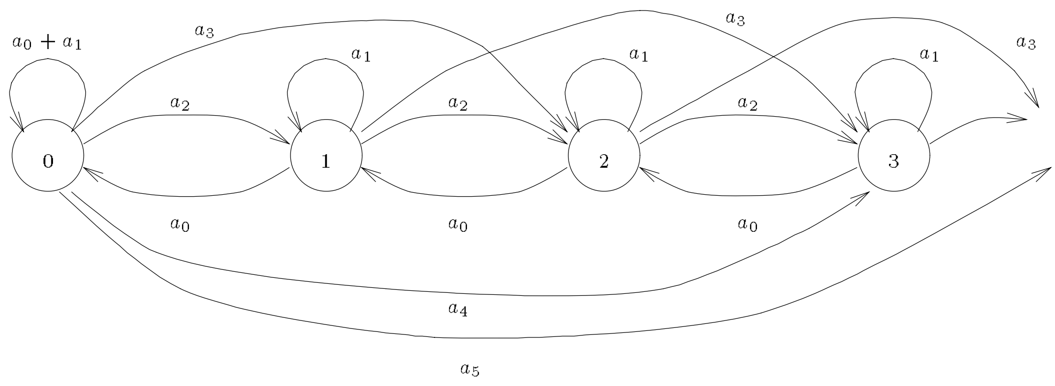
5.10. ábra : Átvitel

Kimeneti sorbaállítás esetén az átvitel:

$$\delta = P_{0,1}(q_1(1-q_2)w_{11} + q_2(1-q_1)w_{21} + q_1q_2(1-w_{12}w_{22})) + \sum_{x\geq 1} P_{x,1} +$$

$$+P_{0,2}(q_1(1-q_2)w_{12} + q_2(1-q_1)w_{22} + q_1q_2(1-w_{11}w_{21})) + \sum_{x\geq 1} P_{x,2}$$

Az 5.10. ábra az átvitel alakulását mutatja az érkezési valószínűség függvényében a két különböző megvalósítás esetén A sorok mérete 5 cella tárolására elegendő, $q_1 = q_2, w_{11} = w_{21} = 0.5$. Nem meglepő, hogy bemeneti sorbaállítás esetén az átvitel az érkezési valószínűség növekedésével 1.5-höz tart. Ha minden időrésben érkezik cella, a sorok állandóan telítettek. Ebben az esetben 1 csomag jut át a kapcsolón, ha van ütközés , és 2 cella, ha nincs ütközés. Mivel esetünkben az ütközés valószínűsége 1/2, az egy időrésben átvitt cellák várható száma 1.5.



5.11. ábra : A kimeneti sort modellező lánc

5.2.5. Sorbanálló igények számának határeloszlása kimeneti sorbaállítás esetén

Tekintsünk egy kimeneti sort. Feltételezzük, hogy a cellák minden bemeneten azonos, független Bernoulli-folyamat szerint érkeznek. Annak valószínűsége, hogy valamely bemenetre cella érkezik egy adott időrésben p. Minden bejövő cella egyenletes eloszlás szerint kerül továbbításra valamely kimenetre.

A megfigyelt kimenet felé az egy időrésben érkező cellák számának eloszlása binomiális eloszlást követ:

$$a_i = P(i \quad \text{cella érkezett az időrésben}) = \binom{N}{i} (p/N)^i (1 - p/N)^{N-i}.$$

Az 5.11. ábrán látható Markov-lánc a megfigyelt sort modellezi, a rendszer egy II. típusú evolúciós egyenlettel írható le, azaz:

$$X_{n+1} = (X_n - 1 + Y_{n+1})^+$$

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} a_0 + a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_{k+1} & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_k & \cdots \\ 0 & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-1} & \cdots \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Az egyensúlyi egyenletek:

$$p_0 = p_0a_0 + p_0a_1 + p_1a_0, \tag{5.1}$$

$$p_k = p_ka_1 + p_{k+1}a_0 + \sum_{i=0}^{k-1} p_ia_{k+1-i} = \sum_{i=0}^{k+1} p_ia_{k+1-i}. \tag{5.2}$$

Vezessük be a következő z-transzformáltakat:

$$P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_kz^k, \quad A(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kz^k.$$

Ekkor (5.1) és (5.2) felhasználásával:

$$P(z) = p_0a_0 + p_0a_1 + p_1a_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=0}^{k+1} p_ia_{k+1-i}z^k =$$

$$= p_0a_0 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k+1} p_ia_{k+1-i}z^k =$$

$$= p_0a_0 + \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{k+1} p_ia_{k+1-i}z^k + \sum_{k=0}^{\infty} p_0a_{k+1}z^k =$$

$$= p_0a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} p_i \sum_{k=i-1}^{\infty} a_{k+1-i}z^k + z^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} p_0a_{k+1}z^{k+1} =$$

$$= p_0a_0 + z^{-1}\sum_{i=1}^{\infty} p_iz^i \sum_{l=0}^{\infty} a_lz^l + z^{-1}p_0 \sum_{m=1}^{\infty} a_mz^m =$$

$$= p_0a_0 + z^{-1}(P(z) - p_0)A(z) + p_0z^{-1}(A(z) - a_0),$$

amiből

$$P(z) = \frac{(1 - z^{-1})p_0a_0}{1 - z^{-1}A(z)} = p_0a_0\frac{(z-1)}{z - A(z)}.$$

Innen, figyelembe véve, hogy $\lim_{z\to 1} P(z) = 1$, a L'Hospital szabály alkalmazásával:

$$1 = p_0a_0\frac{1}{1 - A'(z)}\,|_{z=1},$$

amiből, mivel $A'(1)$ az egy időrésben az adott bemenetre érkező cellák számának várhatóérték adja:

$$p_0a_0 = 1 - A'(z) = 1 - p,$$

és így:

$$P(z) = \frac{(1-p)(z-1)}{z-A(z)} = \frac{(1-p)(1-z)}{A(z)-z}.$$

Alkalmazzuk a kapott eredményt $N = 2$ esetén. Ebben az esetben az érkezési valószínűségek:

$$a_i = \binom{2}{i} \left(\frac{p}{2}\right)^i \left(1-\frac{p}{2}\right)^{2-i},$$

ennek z-transzformáltja:

$$A(z) = \left(1-\frac{p}{2}+z\frac{p}{2}\right)^2,$$

ekkor $P(z)$ a következő:

$$P(z) = \frac{(1-p)(1-z)}{\left(1-\frac{p}{2}+z\frac{p}{2}\right)^2 - z},$$

ebből könnyen számolható például p_0:

$$p_0 = P(z)\mid_{z=0} = \frac{1-p}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^2}.$$

Az eredmény könnyen ellenőrízhető más módszerrel is, mert $N = 2$ esetén a rendszer születési-halálozási folyamat. Az előrelépés valószínűsége a_0, a visszalépés valószínűsége a_2. Ekkor

$$p_0 = \frac{1}{1+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_2}{a_0}\right)^k} = \frac{1-p}{\left(1-\frac{p}{2}\right)^2}.$$

5.2.6. Átvitel számítása bemeneti sorbaállítás esetén

Az 5.2.4. fejezet végén megmutattuk, hogy bemeneti sorbaállítást alkalmazva, hogyan alakul az átvitel az érkezési valószínűség függvényében, ha a bemenetek száma 2. Ebben a fejezetben nagy bemenetszám esetén határozzuk meg az egy időrésben átvitt cellák átlagos számát.

Feltételezzük, hogy a kapcsoló az azonos kimenet felé továbbítandó cellák közül egyenletes eloszlás szerint választ ki egyet átvitelre. Továbbá, hogy a cellák egyenletes eloszlás szerint kerülnek továbbításra valamely kimenet felé.

Azt az esetet vizsgáljuk, amikor a kapcsoló minden bemeneti során mindig van várakozó cella. Az az feltételezzük, hogy a sorok sosem ürülnek ki teljesen.

Jelöléseink a következők:

- legyen R_m^i azon cellák száma, melyek az m. időrésben valamely bemeneti sor elején állnak, az i. kimenetet célozzák és ütközés miatt nem kerülnek átvitelre,
- legyen A_i^m azon cellák száma, amelyek az m. időrésben kerülnek valamely bemeneti sor elejére és az i. kimenet felé továbbítandók.

Ezen jelöléseket használva a következő evolúciós egyenletet írhatjuk fel:

$$R_m^i = max(0, R_{m-1}^i + A_m^i - 1),$$

ahol a -1 tag az éppen átvitt cella miatt kerül a képletbe. A_m^i eloszlása binomiális eloszlást követ:

$$P(A_m^i = k) = \binom{F_{m-1}}{k} (1/N)^k (1 - 1/N)^{F_{m-1}-k}, \qquad k = 0, 1, \cdots, F_{m-1},$$

ahol

$$F_{m-1} = N - \sum_{i=1}^{N} R_{m-1}^i \tag{5.3}$$

A fenti binomiális eloszlás paramétere $1/N$, mivel feltételeztük, hogy minden bemeneten mindig van cella. F_{m-1} azon bemenetek számát jelöli, amelyeknek elejére új cella érkezett, ezek közül kerül kiválasztásra az az A_m^i számú cella, amelyek az i. bemenet felé továbbítandók. Így F_{m-1} az $(m-1)$. időrésben átvitt cellák számát is jelenti egyben.

Jelölje F_m egyensúlyi értékét $\bar{F}$, ekkor egy kimeneti vonal átvitele és $\bar{F}$ között a következő a kapcsolat:

$$\bar{F}/N = \delta$$

Azaz egyensúlyi állapotban a fenti binomiális eloszlásban F_{m-1} helyére δN írható, ez adja A^i eloszlását. Továbbá, ha $N \to \infty$, akkor ez a binomiális eloszlás tart a δ paraméterű Poisson-eloszláshoz. Ebben az esetben az M/D/1 sor eredményei használhatók fel az egy adott irányba várakozó cellák számának meghatározásához, hiszen abban az esetben is éppen Poisson-eloszlás határozza meg, hogy egy igény kiszolgálása alatt hány új igény érkezik a sorba. Tehát az i. kimenetre várakozók egyensúlyi száma:

$$\bar{R}^i = \frac{\delta^2}{2(1-\delta)}. \tag{5.4}$$

N	Átvitel
1	1.0000
2	0.7500
3	0.6825
4	0.6553
5	0.6399
6	0.6302
7	0.6234
8	0.6184
∞	0.5858

5.1. táblázat: Az átvitel alakulása a kapcsoló mérete függvényében

Továbbá (5.3) átrendezésével:

$$\frac{\sum_{i=1}^{N} R^i_{m-1}}{N} = 1 - \frac{F_{m-1}}{N},$$

ami egyensúlyi esetre átírva:

$$\bar{R^i} = 1 - \delta. \tag{5.5}$$

Így (5.4) és (5.5) felhasználásával, abban az esetben, ha $N \to \infty$ és mindig minden bemeneten van cella az átvitel:

$$\delta = (2 - \sqrt{2}) = 0.5858.$$

Ez felső korlátot ad a kapcsológép átvitelére bemeneti sorbaállítás esetén. Az 5.1. táblázat az átvitelt, mint N függvényét mutatja. . Ezen táblázat $N = 2$ sora került kiszámításra az 5.2.4. szakaszban, de ott a teljes kapcsoló átvitelét adtuk meg, míg itt egy kimeneti vonal átvitele szerepel.

5.3. Többprocesszoros több-buszos rendszer külső közös memóriával

5.3.1. A feladat megfogalmazása

5.3.2. Az állapotgráf

5.3.3. Feltételek módosításának hatása

5.4. Állapotgráf módszeres generálása

5.4.1. Szorzattér értelmezése

5.4.2. Állapotok összevonása

5.4.3. Alkalmazási példák

5.5. Petri hálók és modellezési alkalmazása

5.5.1. Petri hálók értelmezése

5.5.2. Elérhetőségi fa

5.5.3. Időkezeléses Petri hálók

5.5.4. Petri hálók modellezési alkalmazása — példák

5.6. ALOHA csatorna teljesítményjellemzői

1. általános megjegyzések

   - Abramson (1970)
   - elv:
     - kész csomag, azonnali adás
     - nyugtázó csatorna nélküli rendszer (műholdas)
     - visszahallja, ha ütközés történt
     - ismétlés adott késleltetési eloszlással, ha ütközés történt
   - háromféle modellezési szint:
     - 0-adrendű modell: *új + ismételt csomagok ≈ Poisson beérkezés*
     - elsőrendű modell: *vizsgált résben új csomagok Poisson beérkezés szerint, ismételtek pontosan, de a vizsgált rés előtt új + ismételt csomagok ≈ Poisson beérkezés*
     - pontos modell: *új csomagok Poisson beérkezés, ismételt igények pontosan az ismétlési szabály alapján*

5.6.1. Réselt ALOHA csatorna teljesítményjellemzői

- alapelvek
  - egy rés = egy csomagidő (T)
  - kész csomag → adás a következő időrésben
  - nyugtázásos megoldás
  - ha nincs nyugta → ismétlés
- 0-adrendű modell
  - összegzett érkezési folyamat (ismételt és új csomagok) g paraméterű Poisson folyamat
  - normalizált forgalom: $G = gT$
  - csatornaállapot minden időrésben független az előző állapotoktól
- egy időrésben érkező csomagok számának eloszlása (Poisson eloszlásból):

  $$p_i = \frac{(gT)^i}{i!}\mathrm{e}^{-gT} = \frac{G^i}{i!}\mathrm{e}^{-G}$$

  ahonnan a hasznos csatornafoglaltság valószínűsége (S):

  $$S = p_1 = G\mathrm{e}^{-G} \tag{5.6}$$

- maximális kihasználtság:

$$\frac{dS}{dG} = \mathrm{e}^{-G} - G\mathrm{e}^{-G} = 0 \to G = 1.0 \to S_{max} = \frac{1}{\mathrm{e}} = 0.36$$

- késleltetés:
  Jelölések: d = késleltetés (v.v.), r = adáskísérletek száma (v.v.),
  A = nyugta érzékelési idő, W_k = a k. ismétlési idő (v.v.), $E(W_k) = R, \forall k$
  r ismétlés esetén a késleltetés:

  $$d = rT + (r-1)A + \sum_{k=1}^{r-1} W_k$$

  Wald összefüggésből:

  $$E(d) = E(r)T + (E(r)-1)A + \sum_{k=1}^{r-1} E(W_k)$$

  sikeres adás valószínűsége egy résben:

  $$P(\text{siker}) = \frac{E(\text{sikeres igények száma})}{E(\text{összes igények száma})} = \frac{G\mathrm{e}^{-G}}{G} = \mathrm{e}^{-G}$$

  adáskisérletek számának eloszása és várható értéke:

  $$P(r=k) = \mathrm{e}^{-G}(1-\mathrm{e}^{-G})^{k-1}, \qquad E(r) = \frac{1}{1-(1-\mathrm{e}^{-G})} = \mathrm{e}^{G},$$

  ahonnan az átlagos késleltetés:

  $$E(d) = \mathrm{e}^{G}T + (\mathrm{e}^{G}-1)(A+R) \tag{5.7}$$

  A késleltetés változása R függvényében (ábra).
- mennyiségi megfontolások:
  - bejövő forgalom (új + ismételt): G
  - kimenő (sikeres) forgalom: S
  - egyensúlyban: bejövő új forgalom = kimenő (sikeres) forgalom
  - ismétlések átlagos száma: bejövő forgalom/sikeres forgalom = G/S

1. elsőrendű modell réselt ALOHA-ra

- új igények λ paraméterű Poisson szerint (egyensúly esetén: $\lambda T = S$)
- ismételt igények g ($gT = G$) paraméterű Poissonból érkező ütköző csomagokból (csak egy lépést visszafelé nézve)
- ismétlés egyenletes eloszlással az $1, \cdots, R$ időintervallumból (a késleltetési idő átlaga ebben az esetben: $(R+1)/2$)
- felismerési késleltetés A időrés
- grafikus ábrázolás
- a megoldás alapgondolata:
  - R darab résből jöhet ismétlés a vizsgált résünkre,
  - P_0 (P_1) annak a valószínűsége, hogy az R közül egy tetszőleges időrésből a vizsgált időrésbe jutó ismételt üzenetek száma 0 (1).
  - akkor jön 0 ismételt csomag az R közül kiválasztott tetszőleges időrésből, ha
    ott volt ütközés, de senki sem sorsol a vizsgált időrésre, vagy ha ott nem volt ütközés

$$P_0 = \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R-1}{R}\right)^n \frac{G^n}{n!} \mathrm{e}^{-G} + (1+G)\mathrm{e}^{-G} = \mathrm{e}^{-G/R} + \frac{G}{R}\mathrm{e}^{-G}$$

  - akkor jön pontosan 1 ismételt csomag, ha
    ott volt ütközés, és pontosan 1 *sorsol a vizsgált időrésre*

$$P_1 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{G^n}{n!}\mathrm{e}^{-G} \; n \, \frac{1}{R} \left(\frac{R-1}{R}\right)^{n-1} = \frac{G}{R}\left[\mathrm{e}^{-G/R} - \mathrm{e}^{-G}\right]$$

  - P_n (P_r) annak a valószínűsége, hogy a vizsgált időrésben egy új (ismételt) igény sikeres.
  - a vizsgált résben egy új igény akkor sikeres, ha:
    pontosan 1 *új igény érkezik, és az egyik lehetséges időrésből sem sorsolódik ide ismétlés*

$$P_n = P_0^R S \mathrm{e}^{-S}$$

  - a vizsgált résben egy ismételt igény akkor sikeres, ha:
    nem érkezik új igény, és a lehetséges időrésekből pontosan 1 *ismétlés sorsolódik ide*

$$P_r = R P_1 P_0^{R-1} \mathrm{e}^{-S}$$

  - átvitel: $S = P_n + P_r$

2. pontos modell réselt ALOHA-ra

- megmutatható, hogy végtelen terminálszámra és véges késleltetésre az ALOHA nem stabil
- M darab igényforrás
- gondolkodó igényforrások
- új igények α paraméterű geometriai eloszlás szerint érkeznek a gondolkodóktól
  j gondolkodó igényforrás esetén
  $$P(\text{új igények száma} = k) = \binom{j}{k} \alpha^k (1-\alpha)^{j-k} \quad \text{(binomiális)}$$
- blokkolt igényforrások
- ismételt igények β paraméterű geometriai eloszlás szerint érkeznek a blokkolt igényforrásoktól
- diszkrét idejű Markov lánc, állapotváltozó a blokkolt igényforrások száma
- az állapot változó ingadozása
  - legfeljebb 1-el csökkenhet,
  - 1-el csökken, *ha van blokkolt igényforrás, nem érkezik új csomag, és pontosan egy felhasználó ismétel,*
  - változatlan marad, *ha nincs új csomag, és nem egy felhasználó ismétel (azaz 0 vagy egynél több),*
    illetve, ha egy új csomag jön és nincs ismétlés,
  - eggyel nő, *ha egy új csomag jön és van ismétlés,*
  - k-val nő, *ha k új csomag jön.*
- az átmeneti valószínűségek véges M esetén
  $$p_{ij} = \begin{cases} 0 & j < i-1 \\ (1-\alpha)^{M-i} i\beta(1-\beta)^{i-1} & j = i-1,\ i > 0 \\ (1-\alpha)^{M-i}(1-i\beta(1-\beta)^{i-1}) + & \\ (M-i)\alpha(1-\alpha)^{M-i-1}(1-\beta)^i & j = i \\ (M-i)\alpha(1-\alpha)^{M-i-1}(1-(1-\beta)^i) & j = i+1 \\ \binom{M-i}{j-i}\alpha^{j-i}(1-\alpha)^{M-j} & i+1 < j \le M \end{cases}$$
- Sikeres csomagtovábbítás valószínűsége:
  (nincs új igény és 1 ismétlés érkezik, vagy 1 új igény és nincs ismétlés)
  $$P(siker \mid i \text{ blokkolt}) = ((1-\alpha)^{M-i} i\beta(1-\beta)^{i-1} + (M-i)\alpha(1-\alpha)^{M-i-1}(1-\beta)^i)$$

- Véges igényforrásszámnál a Markov lánc mindig stabil, de vizsgálható a stabilitás más értelemben is:
  nagyobb-e a várható output, mint a várható input?

  adott állapotban

  $$((1-\alpha)^{M-i} i\beta(1-\beta)^{i-1} + (M-i)\alpha(1-\alpha)^{M-i-1}(1-\beta)^i) > (M-i)\alpha$$

  illetve globálisan

  $$\sum_{i=1}^{M}((1-\alpha)^{M-i} i\beta(1-\beta)^{i-1} + (M-i)\alpha(1-\alpha)^{M-i-1}(1-\beta)^i)p_i > \sum_{i=0}^{M}(M-i)\alpha p_i$$

  Munkapontok (ábrák)

- az átmeneti valószínűségek végtelen igényforrás (M) esetén, ha az összes felhasználótól egy résben érkező csomagok száma λ paraméterű Poisson eloszlású

  $$p_{ij} = \begin{cases} 0 & j < i-1 \\ i\beta(1-\beta)^{i-1}\mathrm{e}^{-\lambda} & j = i-1,\ i > 0 \\ (1 - i\beta(1-\beta)^{i-1})\mathrm{e}^{-\lambda} + (1-\beta)^i \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} & j = i \\ (1-(1-\beta)^i)\lambda \mathrm{e}^{-\lambda} & j = i+1 \\ \frac{\lambda^{j-i}}{(j-i)!}\mathrm{e}^{-\lambda} & i+1 < j \end{cases}$$

- a Foster kritérium alkalmazása a stabilitás vizsgálatára

5.6.2. Nem réselt ALOHA csatorna teljesítményjellemzői

1. 0-adrendű modell

   - összegzett érkezési folyamat (ismételt és új csomagok) g paraméterű Poisson folyamat
   - fix hosszúságú csomagok: T
   - normalizált forgalom: $G = gT$
   - csatornaállapotok:
     - szabad: i
     - foglalt: b
       - sikeres: s

- $*$ nem sikeres: ns

- grafikus ábrázolás
- feltevés: i,b,s stacionárius, ergodikus
- felújítási ciklusok: üres és foglalt állapotok követik egymást
- $E(s)$ a sikeres csatorna foglaltság idejének várható értéke egy cikluson belül (hasonlóan $E(i), E(b), E(ns)$)
- kihasználtság: $S = \dfrac{E(s)}{E(s)+E(ns)+E(i)} = \dfrac{E(s)}{E(b)+E(i)}$ *felújítási ciklusokra*
- a különböző hosszúságú szakaszok hosszának számítása
  - szabad intervallumok hosszának eloszlása és várható értéke: $f_i(t)$

$$f_i(t) = g\mathrm{e}^{-gt}, \quad E(i) = \frac{1}{g} \tag{5.8}$$

  - foglalt intervallumok: $f_b(t)$ — grafikus ábrázolás
    jelölje: N az ütköző csomagok számát (v.v.), és a_i az egymást követő ütköző csomagok érkezése közti időket (v.v.) $(0 \le i \le N)$
    a_i-k eloszlása:

$$f_a(t) = \begin{cases} \dfrac{g\mathrm{e}^{-gt}}{1-\mathrm{e}^{-gT}} & 0 < t \le T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

és várható értéke:

$$E(a) = \int_0^T tg\frac{\mathrm{e}^{-gt}}{1-\mathrm{e}^{-gT}}dt = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-G}}\int_0^T tg\mathrm{e}^{-gt}dt$$

ami parciális integrálással:

$$E(a) = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-G}}(-T\mathrm{e}^{-G} + \frac{1-\mathrm{e}^{-G}}{g}) = \frac{-T}{\mathrm{e}^{G}-1} + \frac{T}{G} \tag{5.9}$$

az ütköző csomagok számának eloszlása:

$$p_n = P(N=n) = (1-\mathrm{e}^{-gT})^n\mathrm{e}^{-gT} = (1-\mathrm{e}^{-G})^n\mathrm{e}^{-G}$$

$$E(N) = \mathrm{e}^{-G}\sum_{n=0}^{\infty} n(1-\mathrm{e}^{-G})^n = \frac{1-\mathrm{e}^{-G}}{\mathrm{e}^{-G}} = \mathrm{e}^{G}-1 \tag{5.10}$$

végül a foglalt intervalumok hossza:

$$b = \sum_{i=1}^{N} a_i + T$$

és várható értéke:

$$E(b) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(T + nE(a)) = T \sum_{n=0}^{\infty} p_n + E(a) \sum_{n=0}^{\infty} p_n n = T + E(N)E(a)$$

(Wald egyenlőség)
amiből:

$$E(b) = (\mathrm{e}^G - 1)(\frac{T}{1-\mathrm{e}^G} + \frac{T}{G}) + T = \frac{T}{G}(\mathrm{e}^G - 1) \tag{5.11}$$

– sikeres intervallumok:
akkor van sikeres csomag, ha az ütköző csomagok száma 0

$$E(s) = TP(N = 0) = Tp_0 = T\mathrm{e}^{-gT} = T\mathrm{e}^{-G} \tag{5.12}$$

– sikertelen intervallumok:
akkor nem sikeres a foglalt intervallum, ha az ütköző csomagok száma nagyobb 0

$$E(ns) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n(T+nE(a)) = T \sum_{n=1}^{\infty} p_n + E(a) \sum_{n=1}^{\infty} p_n n = T(1-p_0) + E(a)E(N) \tag{5.13}$$

- a kihasználtság: S

$$S = \frac{T\mathrm{e}^{-G}}{\frac{T}{G}(\mathrm{e}^G - 1) + \frac{T}{G}} = G\mathrm{e}^{-2G} \tag{5.14}$$

(*A görbe alakja*)

- maximális kihasználtság:

$$\frac{dS}{dG} = \mathrm{e}^{-2G} - 2G\mathrm{e}^{-2G} = 0 \rightarrow G = 0.5 \rightarrow S_{max} = \frac{1}{2\mathrm{e}} = 0.18$$

- késleltetés: grafikus ábrázolás
Jelölések: d =késleltetés, r =adáskísérletek száma,
A = sikertelenség érzékelési idő, W_k =az k. ismétlési idő, $E(W_k) = R, \forall k$

$$d = rT + (r-1)A + \sum_{k=1}^{r-1} W_k$$

$$E(d) = E(r)T + (E(r)-1)A + \sum_{k=1}^{r-1} E(W_k)$$

Mivel a réselt esethez hasonlóan $E(r) = \frac{G}{S}$

$$E(d) = \frac{G}{S}T + (\frac{G}{S} - 1)(A+R) = \mathrm{e}^{2G}T + (\mathrm{e}^{2G} - 1)(A+R) \tag{5.15}$$

Grafikus ábrázolás, lineáris függvény ellentmondása

5.7. CSMA rendszerek

1. alapelv:
   - az ALOHA továbbfejlesztése S növelése érdekében
   - adás előtt "belehallgatás" a csatornába (Carrier Sense Multiple Access)
   - kritikus tényező a jelterjedési idő
2. változatok:
   - nem-kitartó (perzisztens) és 1-kitartó (valószínűséggel kitartó)
   - réseletlen - réselt
   - ütközés detekció nélküli - ütközés detekciós
3. jelölések:
   - T: csomagküldési idő (fixnek vesszük)
   - $a = \tau/T$: normalizált (maximális jelterjedési idő)
   - λ: összegzett érkezési intenzitás (0-adrendű modell)
   - $G = \lambda T$: forgalom
   - csatornaállapotok: ld.
     - szabad: i
     - foglalt: b

  * sikeres: s
  * nem sikeres
- grafikus ábrázolás réseletlenre
- feltevés: i,b,s stacionárius, ergodikus
- felújítási ciklusok értelmezése
- kihasználtság: $S = \dfrac{E(s)}{E(b)+E(i)}$ *felújítási ciklusokra*

5.7.1. Réselt nem-kitartó CSMA vizsgálata

1. szabad intervallumok:

$$P(i = k\tau) = (\mathrm{e}^{-g\tau})^{k-1}(1-\mathrm{e}^{-g\tau})$$
$$E(i) = \frac{\tau}{1-\mathrm{e}^{-g\tau}} \tag{5.16}$$

2. foglalt intervallumok:

$$P(b = k(T+\tau)) = (1-\mathrm{e}^{-g\tau})^{k-1}\mathrm{e}^{-g\tau}$$
$$E(b) = \frac{T+\tau}{\mathrm{e}^{-g\tau}} \tag{5.17}$$

3. sikeres intervallumok:

$$E(s) = T\frac{E(b)}{T+\tau}P_{succ}$$
$$P_{succ} = Pr\{\text{sikeres küldési szakasz}\} =$$
$$Pr\{\text{egyetlen érkezés az utolsó résben egy csomag előtt} \mid \text{volt érkezés}\} =$$
$$\frac{g\tau\mathrm{e}^{-g\tau}}{1-\mathrm{e}^{-g\tau}}$$
$$E(s) = \frac{T}{T+\tau}\frac{T+\tau}{\mathrm{e}^{-g\tau}}\frac{g\tau\mathrm{e}^{-g\tau}}{1-\mathrm{e}^{-g\tau}} = \frac{gT\tau}{1-\mathrm{e}^{-g\tau}} \tag{5.18}$$

4. a kihasználtság: S

$$S = \frac{\frac{gT\tau}{1-\mathrm{e}^{-g\tau}}}{\frac{\tau}{1-\mathrm{e}^{-g\tau}}+\frac{T+\tau}{\mathrm{e}^{-g\tau}}} = \frac{gT\tau\mathrm{e}^{-g\tau}}{T+\tau-T\mathrm{e}^{-g\tau}} = \frac{aG\mathrm{e}^{-ag}}{1+a-\mathrm{e}^{-aG}} \tag{5.19}$$

(*A görbe alakja*)

5. maximális kihasználtság: $lim_{a\to 0}$

$$S_{a\to 0} = \frac{G}{1+G} \tag{5.20}$$

5.7.2. Réselt 1-kitartó CSMA vizsgálata

1. szabad intervallumok: *ld. előbb*

2. foglalt intervallumok:

$$P(b = k(T+\tau)) = (1 - \mathrm{e}^{-g(T+\tau)})^{k-1}\mathrm{e}^{-g(T+\tau)}$$

$$E(b) = \frac{T+\tau}{\mathrm{e}^{-g(T+\tau)}} \tag{5.21}$$

3. sikeres intervallumok:

$$E(s) = T(P_{suc1} + \frac{E(b) - (T+\tau)}{T+\tau}P_{suc2})$$

$$P_{suc1} = \frac{g\tau\mathrm{e}^{-g\tau}}{1 - \mathrm{e}^{-g\tau}}$$

$$P_{suc2} = \frac{g(T+\tau)\mathrm{e}^{-g(T+\tau)}}{1 - \mathrm{e}^{-g(T+\tau)}}$$

4. a kihasználtság: csak a végeredmény

$$S = \frac{G\mathrm{e}^{-(1+a)G}(1 + a - \mathrm{e}^{-aG})}{(1+a)(1 - \mathrm{e}^{-aG}) + a\mathrm{e}^{-(1+a)G}} \tag{5.22}$$

   (*A görbe alakja*)

5. maximális kihasználtság: $\lim_{a\to 0}$

$$S_{a\to 0} = \frac{G(1+G)}{1 + G\mathrm{e}^{G}} \tag{5.23}$$

A. függelék

Valószínűségszámítási összefoglaló

A.1. Események valószínűsége, valószínűségi változók

1. Valószínűség:
   A esemény valószínűsége $Pr(A)$, $0 \leq Pr(A) \leq 1$.

2. Eloszlásfüggvény:
   X v. v. eloszlásfüggvénye $F_X(x) = Pr(X \leq x)$
   Ha X folytonos v. v. akkor $F_X(x)$ deriválható, és az $f_X(x) = dF_X(x)/dx$ függvényt X sűrűségfüggvényének nevezzük.
   Ha X diszkrét, akkor $F_X(x)$ szakaszonként konstans, és p_i mértékű ugrásai vannak x_i-nél.

3. Várható érték:
   X v. v. várható értékét $E(X)$-el jelöljük.
   Ha X folytonos v. v. akkor $E(X) = \int x f(x) dx$.
   Ha X diszkrét, akkor $E(X) = \sum_i x_i p_i$.
   Ha X nem negatív és $E(X)$ véges, akkor $E(X) = \int_0^\infty 1 - F(x) dx$.

4. Intenzitás, hazárd ráta:
   X "bekövetkezésének sebessége" x környezetében $\lambda(x) = f(x)/(1 - F(x))$.

5. Feltételes valószínűség:

A esemény valószínűsége B esemény bekövetkezése esetén

$$Pr(A \mid B) = \frac{Pr(A,B)}{Pr(B)}$$

6. Teljes valószínűség formula:

   - az eseménytér (S) megszámlálható (pozitív valószínűségű) diszjunkt felosztása esetén (azaz $\cup_i B_i = S$, és $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$)

     $$Pr(A) = \sum_i Pr(A \mid B_i) Pr(B_i)$$

   - az eseménytér (S) nem-megszámlálható (0 valószínűségű) diszjunkt felosztása esetén

     $$Pr(A) = \int_t Pr(A \mid X = t) f_X(t) dt$$

     megjegyzés: értelmezze az A eseményre és X valószínűségi változóra vonatkozó a $Pr(A) = E(Pr(A|X))$ kifejezést.

   - több független feltétel esetén a fenti formulák többször is alkalmazhatók.
   - több összefüggő feltétel esetén a feltételek függőségét is figyelembe kell venni:

     $$Pr(A) = \sum_i \sum_j Pr(A \mid B_i, D_j) Pr(B_i \mid D_j) Pr(D_j)$$

     vagy

     $$Pr(A) = \int_x \int_y Pr(A \mid X = x, Y = y) f_{X \mid Y=y}(x) f_Y(y) dy dx$$

7. Hátralévő élettartam:
   X hátralévő élettartamának eloszlása, ha tudjuk, hogy $X > \tau$ ($Pr(X - \tau < t \mid X > \tau)$).

A.2. Gyakorló-ismétlő feladatok

1. 1. feladat: két exponenciális eloszlású tevékenység

   $t = 0$-ban két *független* exponenciális eloszlású ideig tartó tevékenység kezdődik. Az egyik X ideig tart, ahol X λ paraméterű exponenciális eloszlású, a második

Y ideig tart, ahol Y μ paraméterű exponenciális eloszlású v.v. Legyen $V = min(X,Y)$, $Z = max(X,Y)$, $W = Z - V$.

Kérdések:

a) az első (azaz a rövidebb ideig tartó) tevékenység befejezésének ideje (V eloszlása, várható értéke),

b) annak valószínűsége, hogy az X esemény fejeződik be előbb ($Pr(X < Y)$),

c) az első és a második esemény befejezése közti idő (W eloszlása, várható értéke),

d) annak valószínűsége, hogy egy tetszőleges t időpillanatban
   - az X esemény már befejeződött és az Y esemény még nem ($Pr(X < t < Y)$)
   - az első esemény már befejeződött és a második esemény még nem ($Pr(V < t < Z)$)
   - mindkét esemény befejeződött már ($Pr(X < t, Y < t) = Pr(Z < t)$)

e) az a) és a c) pontban kapott valószínűségi változók összegének ($W + V$) eloszlása

f) X eloszlása, ha tudjuk, hogy $X < \tau$ ($Pr(X < t \mid X < \tau)$),

g) X eloszlása, ha tudjuk, hogy $X < Y$ ($Pr(X < t \mid X < Y)$),

h) X eloszlása, ha tudjuk, hogy $X > Y$ ($Pr(X < t \mid X > Y)$).

Megoldás:

a) a rövidebb ideig tartó tevékenység befejezésének ideje

$$Pr(V < t) = 1 - Pr(V > t) = 1 - Pr(X > t, Y > t) =$$

$$= 1 - Pr(X > t)Pr(Y > t) = 1 - e^{-\lambda t}e^{-\mu t} = 1 - e^{-(\lambda+\mu)t}$$

V exponenciális eloszlású $\lambda + \mu$ paraméterrel, $E(V) = \dfrac{1}{\lambda + \mu}$

b) az X esemény fejeződik be előbb

$$Pr(X < Y) = \int_{y=0}^{\infty} Pr(X < y) f_Y(y) dy = \int_{y=0}^{\infty} (1 - e^{-\lambda y}) \mu e^{-\mu y} dy =$$

$$= 1 - \frac{\mu}{\lambda + \mu} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$$

c) az első és a második esemény befejezése közti idő

1. megoldás (nyers erő)

$$Pr(W < t) = \int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} Pr(W < t \mid X = x, Y = y) f_X(x) f_Y(y) dx dy =$$

$$= \int_{y=0}^{\infty}\int_{x=0}^{\infty} Pr(|x-y| < t) f_X(x) f_Y(y) dx dy =$$

$$= \int_{y=0}^{t}\int_{x=0}^{y+t} \lambda e^{-\lambda x} dx \mu e^{-\mu y} dy + \int_{y=t}^{\infty}\int_{x=y-t}^{y+t} \lambda e^{-\lambda x} dx \mu e^{-\mu y} dy = ...$$

2. megoldás

$$Pr(W < t) =$$

$$= Pr(W < t \mid X < Y)\ Pr(X < Y) +\ Pr(W < t \mid X > Y)\ Pr(X > Y) =$$

az $(X < Y)$ feltétel mellett W az Y hátralévő élettartama lesz, ami viszont az exponenciális eloszlás örökifjúsága miatt

$$= Pr(Y < t)\ Pr(X < Y) +\ Pr(X < t)\ Pr(X > Y) =$$

$$\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1-e^{-\mu t}) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}(1-e^{-\lambda t})$$

várható érték

$$E(W) = E(Y)\ Pr(X < Y) +\ E(X)\ Pr(X > Y) = \frac{\lambda}{\mu(\lambda+\mu)} + \frac{\mu}{\lambda(\lambda+\mu)}$$

d) – az X esemény már befejeződött és az Y esemény még nem

$$Pr(X < t < Y) = Pr(X < t) Pr(t < Y) = (1-e^{-\lambda t}) e^{-\mu t}$$

– az első esemény már befejeződött és a második esemény még nem

$$\begin{aligned} Pr(V < t < Z) &= \\ &= Pr(V < t < Z \mid X < Y) Pr(X < Y) + \\ &\quad + Pr(V < t < Z \mid X > Y) Pr(X > Y) = \\ &= Pr(X < t < Y \mid X < Y) Pr(X < Y) + \\ &\quad + Pr(Y < t < X \mid X > Y) Pr(X > Y) = \\ &= Pr(X < t < Y, X < Y) + Pr(Y < t < X, X > Y) = \\ &= Pr(X < t < Y) + Pr(Y < t < X) = \\ &= (1-e^{-\lambda t}) e^{-\mu t} + (1-e^{-\mu t}) e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

– mindkét esemény befejeződött már

$$Pr(X < t, Y < t) = Pr(Z < t) = Pr(X < t)\ Pr(Y < t) =$$

$$= (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\mu t})$$

e) a W és a V valószínűségi változók összegének eloszlása
Mivel összefüggő valószínűségi változókról van szó nem lehet konvoluciót alkalmazni, hanem egyszerűen

$$Pr(W + V < t) = Pr(Z < t) = (1 - e^{-\lambda t})(1 - e^{-\mu t})$$

f) X eloszlása, ha $X < \tau$

$$Pr(X < t \mid X < \tau) = \frac{Pr(X < t, X < \tau)}{Pr(X < \tau)} =$$

amiből az $X < \tau$ ismerettel (feltétellel) módosított valószínűségi változó eloszlás függvénye

$$\begin{cases} \dfrac{Pr(X < t)}{Pr(X < \tau)} = \dfrac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda \tau}} & 0 < t < \tau \\ 1 & t > \tau \end{cases}$$

g) X eloszlása, ha $X < Y$

$$Pr(X < t \,|\, X < Y) = \frac{Pr(X < t, X < Y)}{Pr(X < Y)} = \frac{\int_{y=0}^{\infty} Pr(X < t, X < y) f_Y(y) dy}{Pr(X < Y)} =$$

$$= \frac{\int_{y=0}^{t} Pr(X < y) f_Y(y) dy}{Pr(X < Y)} + \frac{\int_{y=t}^{\infty} Pr(X < t) f_Y(y) dy}{Pr(X < Y)} = 1 - e^{-(\lambda + \mu)t}$$

azaz $\lambda + \mu$ paraméterű exponenciális eloszlás.

h) X eloszlása, ha $X > Y$

$$Pr(X < t \,|\, X > Y) = \frac{Pr(X < t, X > Y)}{Pr(X > Y)} = \frac{\int_{y=0}^{\infty} Pr(X < t, X > y) f_Y(y) dy}{Pr(X > Y)} =$$

$$= \frac{\int_{y=0}^{t} Pr(y < X < t) f_Y(y) dy}{Pr(X > Y)} = \frac{\int_{y=0}^{t} (F_X(t) - F_X(y)) f_Y(y) dy}{Pr(X > Y)} =$$

$$1 - e^{-\lambda t} - \frac{\lambda}{\mu} e^{-\lambda t}(1 - e^{-\mu t})$$

2. Geometriai eloszlás várható értéke
$Pr(X=i)=(1-p)p^{i-1}, \quad i=1,2,..$ esetén definició szerint

$$E(X)=\sum_{i=1}^{\infty} i(1-p)p^{i-1}$$

azonban meghatározhatjuk a váható értéket az örökifjúság felhasználásával is:

$$E(X)=E(X\mid X=1)Pr(X=1)+E(X\mid X>1)Pr(X>1)=1(1-p)+(1+E(X))p$$

ahol $E(X\mid X>1)$ egyenlő 1 plusz a hátralévő élettartam várható értéke, ami az örökifjúság miatt megegyezik az eredeti várható értékkel. Innét viszont megkapjuk, hogy

$$E(X)=\frac{1}{1-p}$$

a definició szerinti felírással összevetve azt is megkapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\ p^{i-1}=\frac{1}{(1-p)^2}$$

3. 2. feladat: két geometriai eloszlású tevékenység
Oldja meg a fenti feladatokat abban az esetben, ha az időskála diszkrét, és a $t=0$ pillanatban két *független* geometriai eloszlású ideig tartó tevékenység kezdődik. Az egyik X ideig tart, ahol $Pr(X=i)=(1-p)p^{i-1}, \quad i=1,2,..$ a második Y ideig tart, ahol $Pr(Y=i)=(1-q)q^{i-1}, \quad i=1,2,...$ Legyen $V=min(X,Y)$, $Z=max(X,Y)$, $W=Z-V$.

a) a rövidebb ideig tartó tevékenység befejezésének ideje

$$Pr(V=t)=Pr(V=t\mid X<Y)\ Pr(X<Y)+$$

$$+Pr(V=t\mid X>Y)\ Pr(X>Y)+Pr(V=t\mid X=Y)\ Pr(X=Y)=$$

$$Pr(X=t,t<Y)+Pr(Y=t,X>t)+Pr(X=t,Y=t)=$$

$$Pr(X=t)\ Pr(t<Y)+Pr(Y=t)\ Pr(X>t)+Pr(X=t)\ Pr(Y=t)=$$

$$=Pr(X=t)\ Pr(t\geq Y)+Pr(Y=t)\ Pr(X>t)=$$

$$=(1-p)p^{t-1}q^{t-1}+(1-q)q^{t-1}p^{t}=(1-pq)(pq)^{t-1}$$

azaz pq paraméterű geometriai eloszlás.

b) az X esemény fejeződik be előbb

$$Pr(X < Y) = \sum_{x=1}^{\infty} Pr(x < Y)\ Pr(X = x) = \sum_{x=1}^{\infty} q^x (1-p) p^{x-1} = \frac{q(1-p)}{1-pq}$$

a két esemény egyszerre fejeződik be

$$Pr(X = Y) = \sum_{x=1}^{\infty} Pr(X = x)\ Pr(Y = x) = \sum_{x=1}^{\infty} (1-q) q^{x-1} (1-p) p^{x-1} =$$

$$= \frac{(1-q)(1-p)}{1-pq}$$

az X esemény nem később fejeződik be

$$Pr(X \leq Y) = \frac{1-p}{1-pq}$$

c) az első és a második esemény befejezése közti idő
W lehetséges értékei $0, 1, 2, \ldots$

$$Pr(W = 0) = Pr(X = Y) = \frac{(1-q)(1-p)}{1-pq}$$

Ha $t > 0$ akkor 1. megoldás (nyers erő)

$$Pr(W = t) =$$

$$\sum_{y=1}^{\infty} \sum_{x=1}^{\infty} Pr(W = t \mid X = x, Y = y) Pr(X = x) Pr(Y = y) =$$

$$= \sum_{y=1}^{\infty} Pr(X = y + t) Pr(Y = y) + \sum_{x=1}^{\infty} Pr(X = x) Pr(Y = y + t) = ...$$

2. megoldás ($t > 0$ esetre)

$$Pr(W = t) =$$

$$= Pr(W = t \mid X < Y)\ Pr(X < Y) + Pr(W = t \mid X > Y)\ Pr(X > Y)$$

az $(X < Y)$ feltétel mellett W az Y hátralévő élettartama lesz, ami viszont a geometriai eloszlás örökifjúsága miatt

$$= Pr(Y = t)\ Pr(X < Y) + Pr(X = t)\ Pr(X > Y) =$$

$$= \frac{q(1-p)}{1-pq}(1-q)q^{t-1} + \frac{p(1-q)}{1-pq}(1-p)p^{t-1}$$

W várható értéke

$$E(W) = E(Y)\ Pr(X < Y) + E(X)\ Pr(X > Y) + 0\ Pr(X = Y) =$$

$$= \frac{q(1-p)}{1-pq}\frac{1}{1-q} + \frac{p(1-q)}{1-pq}\frac{1}{1-p}$$

d) – t-ben az X esemény már befejeződött és az Y esemény még nem

$$Pr(X \leq t < Y) = Pr(X \leq t)\ Pr(t < Y) = (1-p^t)q^t$$

– az első esemény már befejeződött és a második esemény még nem

$$\begin{aligned}
Pr(V \leq t < Z) &= \\
&= Pr(V \leq t < Z \mid X < Y)Pr(X < Y) + \\
&\quad + Pr(V \leq t < Z \mid X > Y)Pr(X > Y) = \\
&= Pr(X \leq t < Y \mid X < Y)Pr(X < Y) + \\
&\quad + Pr(Y \leq t < X \mid X > Y)Pr(X > Y) = \\
&= Pr(X \leq t < Y, X < Y) + Pr(Y \leq t < X, X > Y) = \\
&= Pr(X \leq t < Y) + Pr(Y \leq t < X) = \\
&= Pr(X \leq t)Pr(t < Y) + Pr(Y \leq t)Pr(t < X) = \\
&= (1-p^t)q^t + p^t(1-q^t)
\end{aligned}$$

– mindkét esemény befejeződött már

$$Pr(X \leq t, Y \leq t) = Pr(Z \leq t) = Pr(X \leq t)Pr(Y \leq t) = (1-p^t)(1-q^t)$$

e) a W és a V valószínűségi változók összegének eloszlása

$$\begin{aligned}
Pr(W + V = t) &= Pr(Z = t) = \\
&= Pr(Z = t \mid X \leq Y)Pr(X \leq Y) + Pr(Z = t \mid X > Y)Pr(X > Y) = \\
&= Pr(Y = t \mid X \leq Y)Pr(X \leq Y) + Pr(X = t \mid X > Y)Pr(X > Y) = \\
&= Pr(Y = t, X \leq Y) + Pr(X = t, X > Y) = \\
&= Pr(Y = t, X \leq t) + Pr(X = t, t > Y) = \\
&= Pr(Y = t)Pr(X \leq t) + Pr(X = t)Pr(Y < t) = \\
&= (1-q)q^{t-1}(1-p^t) + (1-p)p^{t-1}(1-q^{t-1})
\end{aligned}$$

f) X eloszlása, ha $X < \tau$
ekkor X lehetséges értékei $1, 2, 3, \ldots, \tau - 2, \tau - 1$

$$Pr(X = t \mid X < \tau) = \frac{Pr(X = t, X < \tau)}{Pr(X < \tau)} =$$

ami $t < \tau$ esetén

$$\frac{Pr(X = t)}{Pr(X < \tau)} = \frac{(1-p)p^{t-1}}{1 - p^{\tau-1}}$$

g) X eloszlása, ha $X < Y$
ekkor X lehetséges értékei $1, 2, 3, \ldots$

$$Pr(X = t \mid X < Y) = \frac{Pr(X = t, X < Y)}{Pr(X < Y)} =$$

$$= \frac{\sum_{y=1}^{\infty} Pr(X = t, X < y)\ Pr(Y = y)}{Pr(X < Y)} =$$

$$= \frac{\sum_{y=t+1}^{\infty} Pr(X = t)\ Pr(Y = y)}{Pr(X < Y)} = \frac{Pr(X = t)\ Pr(Y > t)}{Pr(X < Y)} =$$

$$\frac{(1-p)p^{t-1}q^t}{\frac{q(1-p)}{1-pq}} = (1-pq)(pq)^{t-1}$$

azaz pq paraméterű geometriai eloszlás.

h) X eloszlása, ha $X > Y$
ekkor X lehetséges értékei $2, 3, \ldots$

$$Pr(X = t \mid X > Y) = \frac{Pr(X = t, X > Y)}{Pr(X > Y)} =$$

$$= \frac{\sum_{y=1}^{\infty} Pr(X = t, X > y)\ Pr(Y = y)}{Pr(X > Y)} =$$

$$= \frac{\sum_{y=1}^{t-1} Pr(X = t)\ Pr(Y = y)}{Pr(X > Y)} = \frac{Pr(X = t)\ Pr(Y < t)}{Pr(X > Y)} =$$

$$\frac{(1-p)p^{t-1}(1-q^{t-1})}{\frac{p(1-q)}{1-pq}} = \frac{(1-pq)(1-p)}{p(1-q)}(p^{t-1}-(pq)^{t-1})$$

Határozza meg ennek az eloszlásnak a z transzformáltját, ellenőrizze, hogy eloszlást kaptunk-e, számítsa ki az eloszlás várható értékét.

4. 3. feladat: nyers erő módszere
   Oldja meg az exponenciális és a geometriai eloszlású valószínűségi változokra vonatkozó valószínűségi megfontolásokkal megoldott feladatokat a nyers erő módszerével. Irja fel a vonatkozó összefüggéseket mindkét integrálási (összegzési) sorrenddel.

5. 4. feladat: különböző eloszlású tevékenységek
   Oldja meg a fenti feladatokat abban az esetben, ha

   - X exponenciális és Y folytonos egyenletes eloszlású,
   - X exponenciális és Y diszkrét egyenletes eloszlású,
   - X geometriai és Y diszkrét egyenletes eloszlású,
   - X geometriai és Y folytonos egyenletes eloszlású.

6. **tapasztalatok független exponenciális (geometriai) eloszlású ideig tartó tevékenységekre vonatkozóan:**

   - **kettő vagy több tevékenység közül a legelső befejezésének ideje exponenciális (geometriai) eloszlású, melynek paramétere az egyes tevékenységek paramétereinek összege (szorzata).**
   - **az, hogy melyik az első esemény, az események paramétereinek arányában oszlik meg.**
   - **az, hogy melyik tevékenység fejeződik be először, nem függ az az első esemény bekövetkezésének idejétől.**
   - **az első eseményt követően a még be nem fejezett tevékenységek hátralévő élettartama exponenciális (geometriai) eloszlású.**
   - **ha eredetileg kettőnél több esemény versenyzett egymással, vagy az első eseményt követően új exponenciális (geometriai) eloszlású tevékenység(ek) kezdődnek, akkor az első esemény bekövetkezése után az eredetihez hasonló helyzetet kapunk, amelyben exponenciális (geometriai) eloszlású ideig – vagy hátralévő ideig – tartó tevékenységek versenyeznek egymással.**