TÖMEGKISZOLGÁLÁS II.

példasorok és megoldásaik

Telek Miklós

Budapesti Műszaki Egyetem

2005.

2002. Jan. 8.
Tömegkiszolgálás vizsga

1/ Egy D_0, D_1 mátrixokkal adott MAP esetén $X_0, X_1, \ldots$ az érkezések utáni fázis, míg $T_0 = 0, T_1, \ldots$ az érkezések pillanatai. Adja meg a következő valószínűségeket:

- $Pr(X_1 = j | X_0 = i)$
- $Pr(T_1 < t | X_0 = i)$
- $Pr(X_1 = j, T_1 < t | X_0 = i)$
- *adja meg a* $Pr(X_1 = j | X_0 = i)$ *valószínűséget* $p_k(t)$ *alapján*
- *adja meg a* $Pr(T_1 < t | X_0 = i)$ *valószínűséget* $p_k(t)$ *alapján*

ahol $p_k(t) = Pr(X(t) = k, T_1 > t | X_0 = i)$*, és* $X(t)$ *a fázis folyamat.*

Megoldás:

- $Pr(X_1 = j | X_0 = i) = [(-D_0)^{-1} D_1]_{ij}$
- $Pr(T_1 < t | X_0 = i) = [e^{D_0 t} \mathbb{1}]_i$
- a j fázisra vezető érkezési intenzitás a t pillanatban $[e^{D_0 t} D_1]_{ij}$, ahonnét

$$Pr(X_1 = j, T_1 < t | X_0 = i) = \int_{\tau=0}^{t} [e^{D_0 \tau} D_1]_{ij} d\tau$$

- $Pr(X_1 = j | X_0 = i) = p_j(0)$
- $Pr(T_1 < t | X_0 = i) = p_j(0) - p_j(t)$

2/ Szemi-Markov folyamat tranziens viselkedésének leírása az állapotátmenetekbe ágyazott Markov felújítási folyamat alapján.

Megoldás: A keresett állapotátmeneti valószínűség $\pi_{ij}(t) = Pr(X(t) = j \mid X(0) = i)$. Feltéve, hogy az első állapotátmenet h pillanatban történik bevezetjük a következő mennyiséget

$$\pi_{ij}(t | T_1 = h) = Pr(X(t) = j \mid X(0) = i, T_1 = h).$$

Ekkor

$$\pi_{ij}(t|T_1=h) = \begin{cases} \delta_{ij} & h \geq t \\ \sum\limits_{k\in S} Pr(X(T_1)=k \mid X(0)=i, T_1=h)\ \pi_{ij}(t-h) & h < t, \end{cases}$$

ahol $Pr(X(T_1)=j \mid X(0)=i, T_1=h)$ annak a valószínűsége, hogy a folyamat az i állapotból a $T_1 = h$ pillanatban a k állapotba lép.

$$Pr(X(T_1)=j \mid X(0)=i, T_1=h) = \frac{dQ_{ij}(h)}{dQ_i(h)}.$$

A keresett mennyiséget a teljes valószínűség tétel alkalmazásával az i állapot tartási idő eloszlásából kapjuk:

$$\pi_{ij}(t) = \int_{h=0}^{\infty} \pi_{ij}(t|T_1=h)\ dQ_i(t),$$

ahol $Q_i(t) = \sum_j Q_{ij}(t)$. Az integrált kiértékelve a következő kifejezés adódik:

$$\pi_{ij}(t) = \delta_{ij}\ (1-Q_i(t)) + \int_{h=0}^{t} \sum_{k\in S} \pi_{kj}(t-h)\ dQ_{ik}(h).$$

3/ M/M/1 sor tranziens viselkedése. Adja meg a következő valószínűségeket:

- ${}_{n-1}P_{n,n}(t) = Pr(X(t)=n, X(u)>n-1, 0<u<t|X(0)=n)$
  felhasználva, hogy az n. szintről az $n-1$. szintre lépés idejének eloszlás függvénye $G_n(t)$, sűrűség függvénye $g_n(t)$.
- *fejezze ki ennek Laplace transformáltját.*

Megoldás:

- Az n. szinten eltöltött idő $\lambda+\mu$ paraméterű exponenciális eloszlású. Az első átlépésig az n. szinten tartózkodik a folyamat. Az első átlépés $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ valószínűséggel az $n+1$. szintre vezet, míg $\frac{\mu}{\lambda+\mu}$ valószínűséggel az $n-1$. szintre, így

$${}_{n-1}P_{n,n}(t) = e^{-(\lambda+\mu)t} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu} \int_{\tau=0}^{t} (\lambda+\mu) e^{-(\lambda+\mu)t} \int_{\gamma=0}^{t-\tau} g_n(\gamma)\ {}_{n-1}P_{n,n}(t-\tau-\gamma) d\gamma d\tau.$$

- Tagonként transzformálhatjuk a kifejezést:

$${}_{n-1}P^*_{n,n}(s) = \frac{1}{\lambda+\mu+s} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\ \frac{\lambda+\mu}{\lambda+\mu+s}\ g^*_n(s)\ \ {}_{n-1}P^*_{n,n}(s)$$

4/ Egy QBD reguláris részében A_2, A_1, A_0. Mi a stabilitás feltétele,

ha $A_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} \bullet & \mu_3 \\ 0 & \bullet \end{bmatrix}$, $A_0 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ *?*

Megoldás:

Az $A = A_0 + A_1 + A_2$ generátorral jellemzett fázis folyamat nem irreducibilis. A fázis folyamat 1-es állapota tranziens a kettes pedig egy nyelő állapot. Ezért csak a kettes állapotban kell teljesüljön, hogy az átlépések tendenciája negatív, azaz $\mu_2 > \lambda$.

5/ ATM switch bemenete 2-szeres sebességű a kimenethez képest. Feltételezve, hogy a bemeneten csak egy ON-OFF forrás van adja meg a kapcsolóban lévő csomagok számát leíró folyamatot, ha $Pr(ON \to OFF) = p$, $Pr(OFF \to ON) = q$.

Megoldás:

Meg kell különböztetnünk a forrás és a kimenő link cellaidejét, ahol az előbbi fele az utóbbinak. A cellák számát a kimenő link cellaidejének megfelelő diszkrét idejű QBD folyamat írja le. Amíg a forrás folytonosan ON állapotban van a kimeneti link minden lépésközében eggyel nő a cellák száma a bufferben, mivel két cella érkezik egy cella továbbítása alatt. Amíg a forrás folytonosan OFF állapotban egy (kimeneti) lépés alatt eggyel csökken a tároló tartalma. Mivel a forrás minden cellaidő végén állapotot válthat előfordulhat, hogy egy kimeneti cellaidőben pontosan 1 cella érkezik. Ha az ON az 1-es állapot, akkor a következő mátrixok adódnak:

$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ (1-q)^2 & (1-q)q \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} p\,q & p(1-q) \\ q(1-p) & q\,p \end{bmatrix}$,

$A_0 = \begin{bmatrix} (1-p)^2 & (1-p)p \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

2002. Jan. 22.
Tömegkiszolgálás vizsga

1/ Egy D_0, D_1 mátrixokkal adott MAP esetén hosszú idő elteltével:

- *hány igény érkezik időegységenként,*
- *adja meg egymást követő két érkezési időköz korrelációját, ha ismert az érkezési időköz, és az érkezés utáni fázis együttes eloszlása ($K_{ij}(t) = Pr(X_1 = j, T_1 < t|X_0 = i)$)!*

Megoldás:

- $\lambda = \alpha D_1 \mathbb{1}$, ahol α a fázisfolyamat egyensúlyi eloszlása ($\alpha(D_0 + D_1) = 0$ és $\alpha\mathbb{1} = 1$).
- $$R(T_1, T_2) = \frac{E(T_1T_2) - E(T_1)E(T_2)}{\sqrt{(E(T_1^2) - E^2(T_1))(E(T_2^2) - E(T_2))}},$$
  ahol $E(T_1) = E(T_2) = \alpha(-D_0)^{-1}\mathbb{1}$, $E(T_1^2) = E(T_2^2) = 2\alpha(-D_0)^{-2}\mathbb{1}$ és
  $$E(T_1T_2) = -\sum_i \alpha_i \int_{t=0} t \int_{\tau=0} \tau \ [e^{D_0\tau}D_1\mathbb{1}]_j \ d\tau \ dK_{ij}(t).$$

2/ Definiája a folytonos idejű QBD folyamatok G mátrixának elemeit és ismertesse a G mátrix meghatározásának (tanult) numerikus módszereit.

Megoldás: Az $\{N(t), J(t)\}$ szint és fázis folyamatban γ_n jelölje az első időpontot, amikor a folyamat az n. szintre lép ($\gamma_n = \min(t > 0|N(t) = n)$). Ekkor

$$G_{ij} = Pr(J(\gamma_{n-1} = j)|N(0) = n, J(0) = i)$$

A G mátrix a $0 = A_2 + A_1G + A_0G^2$ matrix egyenlet minimális nem-negatív megoldása. Stabil QBD esetén a G mátrix sztochasztikus mátrix.

- Lineális "feltöltő" algoritmus:

$$\begin{array}{l} \mathbf{G} := \mathbf{0}; \\ \mathbf{REPEAT} \\ \quad \mathbf{G} := (-\mathbf{A_1} - \mathbf{A_0G})^{-1}\,\mathbf{A_2}; \\ \mathbf{UNTIL} ||\mathbb{1} - \mathbf{G}\mathbb{1}|| \le \epsilon \end{array}$$

- lineális "elosztó" algoritmus:

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{G} := \mathbf{I}; \\
\mathbf{REPEAT} \\
\quad \mathbf{G}_{old} := \mathbf{G}; \\
\quad \mathbf{G} := \left(-\mathbf{A_1} - \mathbf{A_0}\mathbf{G}\right)^{-1} \mathbf{A_2}; \\
\mathbf{UNTIL} ||\mathbf{G} - \mathbf{G}_{old}|| \leq \epsilon
\end{array}
$$

- logaritmikus algoritmus:

$$
\begin{array}{l}
\mathbf{H} := \left(-\mathbf{A_1}\right)^{-1} \mathbf{A_0}; \\
\mathbf{L} := \left(-\mathbf{A_1}\right)^{-1} \mathbf{A_2}; \\
\mathbf{G} := \mathbf{L}; \\
\mathbf{T} := \mathbf{H}; \\
\mathbf{REPEAT} \\
\quad \mathbf{U} := \mathbf{HL} + \mathbf{LH}; \\
\quad \mathbf{H} := \left(\mathbf{I} - \mathbf{U}\right)^{-1} \mathbf{H}^2; \\
\quad \mathbf{L} := \left(\mathbf{I} - \mathbf{U}\right)^{-1} \mathbf{L}^2; \\
\quad \mathbf{G} := \mathbf{G} + \mathbf{TL}; \\
\quad \mathbf{T} := \mathbf{TH}; \\
\mathbf{UNTIL} ||\mathbb{1} - \mathbf{G}\mathbb{1}|| \leq \epsilon
\end{array}
$$

3/ Milyen kapcsolatban állhat a QBD folyamatok G és R mátrixainak legnagyobb sajátértéke. Válaszához adjon szemléletes "fizikai" indoklást.

Megoldás:

QBD	pozitív visszatérő	null visszatérő	nem visszatérő
$sp(R)$	<1	1	1
$sp(G)$	1	1	<1

ahol $sp()$ a spektrál rádiuszt jelöli. Az R mátrix az $n.$ és az $n-1.$ szinten eltöltött idő arányát adja meg. Ha a folyamat visszatérő, akkor az $n.$ szintről indulva 1 valószínűséggel visszalép az $n-1.$ szintre, így a G mátrix sztochasztikus, aminek legnagyobb sajátértéke 1. Ha a folyamat nem visszatérő, akkor az $n.$ szintről indulva < 1 valószínűséggel lép vissza a folyamat az $n-1.$ szintre, így a G mátrix szubsztochasztikus, aminek legnagyobb sajátértéke < 1.

4/ Egy MAP/M/1 sor érkezési folyamata D_0, D_1 mátrixokkal adott és kiszolgálási intenzitása μ.

- *Adja meg a sor QBD leírásának három mátrixát.*
- *Hosszú idő elteltével az aktív periódus (amíg legalább egy igény van a rendszerben) utáni fázis, α, és az üres periódus utáni fázis, β, meghatározható a következő egyenletekből $\alpha = \beta G$, $\beta = \alpha(-D_0)^{-1}D1$. Miért?*
- *Hogyan határozná meg az egyenletekből β és α értékét?*

Megoldás:

- $A_2 = \mu I$, $A_1 = D_0 - \mu I$, $A_0 = D_1$.
- A foglalt időszak elején az 1. szinten, míg az üres időszak elején a 0. szinten tartózkodik a folyamat. A G mátrix pont a fázis változást írja le egy "lefelé" lépés hatására.

  A 0. szinte egy (α, D_0) PH eloszlású időt tölt a folyamat, és aztán a D_1 mátrixnak megfelelően lép az 1. szintre. A 0. szint egyes állapotaiban töltött idő várható értéke $\alpha(-D_0)^{-1}$, és így az 1. szint egyes állapotaiba lépés valószínűsége $\alpha(-D_0)^{-1}D_1$.
- α és β az alábbi lineális egyenletrendszerek megoldása:

$$\alpha = \alpha(-D_0)^{-1}D_1G, \quad \alpha\mathbb{1} = 1 \ ,$$

$$\beta = \beta G(-D_0)^{-1}D_1, \quad \beta\mathbb{1} = 1 \ .$$

5/ Adja meg az M/PH/1/2 sor kimenő folyamatának MAP reprezentációját, ha az érkezési intenzitás λ és a kiszolgálási idő PH eloszlású τ, T paraméterekkel.

Megoldás: A sor viselkedését leíró Markov lánc struktúrája:

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\lambda & \lambda\tau & \\ \hline t & T{-}\lambda I & \lambda I \\ \hline & t\tau & T \\ \hline \end{array} \ ,$$

ahol $t = -T\mathbb{1}$. A szint csökkenéssel járó átmenetek járnak távozással, így

$$\mathbf{D_0} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline -\lambda & \lambda\tau & \\ \hline & T{-}\lambda I & \lambda I \\ \hline & & T \\ \hline \end{array}, \qquad \mathbf{D_1} = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & & \\ \hline t & & \\ \hline & t\tau & \\ \hline \end{array}.$$

2002. Jan. 29.
Tömegkiszolgálás vizsga

1/ Egy D_0, D_1 mátrixokkal adott MAP esetén $X_0, X_1, \ldots$ az érkezések utáni fázis, míg $T_0 = 0, T_1, \ldots$ az érkezések pillanatai. Adja meg a

- $Pr(X_1 = j | X_0 = i)$ *a valószínűséget,*
- $Pr(T_1 < t | X_0 = i)$ *a valószínűséget,*
- *a t idő alatt érkező igények számának eloszlását,*
- $Pr(X_1 = j, T_1 < t | X_0 = i)$ *a valószínűséget,*
- *az egyensúlyi állapotban az érkezési időköz eloszlását.*
- *Ha az egyensúlyi érkezési időköz PH eloszlású, akkor adja meg annak PH reprezentációját, nem indokolja miért.*
- *Adja meg az első és második érkezési időköz korrelációját:*

$$R(T_1, T_2) = \frac{E(T_1T_2) - E(T_1)E(T_2)}{\sqrt{(E(T_1^2) - E^2(T_1))(E(T_2^2) - E(T_2))}}$$

Megoldás:

- $Pr(X_1 = j | X_0 = i) = [(-D_0)^{-1}D_1]_{ij}$,
- $Pr(T_1 < t | X_0 = i) = 1 - \epsilon_i e^{D_0 t}\mathbb{1}$, ahol $\epsilon_i = \{0, \ldots, 0, 1_i, 0, \ldots, 0\}$ olyan sorvektor, aminek egyetlen nem 0 eleme az i-edik elem, ami 1.
- A t idő alatt érkező igények számának eloszlása z transzformált tartományban: $\hat{P}(z,t) = e^{(D_0 + zD_1)t}$, ahol $P_{ij}(n,t) = Pr(N(t) = n, J(t) = j | N(0) = 0, J(0) = i)$, és $\hat{P}_{ij}(z,t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}(n,t) z^n$.
- a j fázisra vezető érkezési intenzitás a t pillanatban $[e^{D_0 t}D_1]_{ij}$, ahonnét

$$Pr(X_1 = j, T_1 < t | X_0 = i) = \int_{\tau=0}^{t} [e^{D_0\tau}D_1]_{ij} d\tau$$

- Hosszú idő elteltével az érkezési pillanatokban a fázis eloszlását a $\alpha = \alpha(-D_0)^{-1}D_1, \alpha\mathbb{1} = 1$ lineális egyenletrendszer megoldása adja. Ez alapján az érkezési időköz eloszlása: $1 - \alpha e^{D_0 t}\mathbb{1}$.
- Az egyensúlyi érkezési időköz α, D_0 reprezentációjú PH eloszlás.
- $R(T_1, T_2)$ meghatározható a következő mennyiségek alapján: $\pi_1 = \pi_0(-D_0)^{-1}D_1$ $E(T_1) = \pi_0(-D_0)^{-1}\mathbb{1}$ $E(T_2) = \pi_1(-D_0)^{-1}\mathbb{1}$, $E(T_1^2) = 2\pi_0(-D_0)^{-2}\mathbb{1}$, $E(T_2^2) = 2\pi_1(-D_0)^{-2}\mathbb{1}$ és

$$E(T_1T_2) = -\sum_i \pi_{0i} \int_{t=0} t \int_{\tau=0} \tau \; [e^{D_0\tau}D_1\mathbb{1}]_j \; d\tau \; dK_{ij}(t),$$

ahol $K_{ij}(t) = Pr(X_1 = j, T_1 < t | X_0 = i) = \int_{\tau=0}^{t} [e^{D_0\tau}D_1]_{ij}$.

2/ Markov folyamat tranziens viselkedésének leírása az állapotátmenetekbe ágyazott Markov felújítási folyamat alapján.

Megoldás:

$$\pi_{ij}(t|T_1 = h) = Pr(X(t) = j \mid X(0) = i, T_1 = h) = \begin{cases} \delta_{ij} & h \geq t \\ \displaystyle\sum_{k\in S, k\neq i} \frac{q_{ik}}{-q_{ii}} \pi_{kj}(t-h) & h < t, \end{cases}$$

ahol δ_{ij} a Kronecker delta ($\delta_{ij} = 1$ ha $i = j$ és $\delta_{ij} = 0$ ha $i \neq j$), és $\frac{q_{ik}}{-q_{ii}}$ annak a valószínűsége, hogy a Markov lánc az i állapotból a k állapotba lép. A feltételt feloldva

$$\begin{aligned}
\pi_{ij}(t) &= \int_{h=0}^{\infty} \pi_{ij}(t|T_1 = h) \; (-q_{ii}) \; e^{q_{ii}h} \; dh \\
&= \int_{h=t}^{\infty} \delta_{ij} \; (-q_{ii}) \; e^{q_{ii}h} \; dh + \int_{h=0}^{t} \sum_{k\in S, k\neq i} \frac{q_{ik}}{-q_{ii}} \; \pi_{kj}(t-h) \; (-q_{ii}) \; e^{q_{ii}h} \; dh \\
&= \delta_{ij} \; e^{q_{ii}t} + \int_{h=0}^{t} \sum_{k\in S, k\neq i} \frac{q_{ik}}{-q_{ii}} \; \pi_{kj}(t-h) \; (-q_{ii}) \; e^{q_{ii}h} \; dh \\
&= \delta_{ij} \; e^{q_{ii}t} + \sum_{k\in S, k\neq i} q_{ik} \int_{h=0}^{t} \pi_{kj}(t-h) \; e^{q_{ii}h} \; dh.
\end{aligned}$$

4/ Egy QBD reguláris részében A_2, A_1, A_0. Mi a stabilitás feltétele, ha $A_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_1 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} \bullet & \mu_2 \\ 0 & \bullet \end{bmatrix}$, $A_0 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{bmatrix}$ *?*

Megoldás: A reguláris részben fázis folyamat generátora
$A = A_2 + A_1 + A_0 = \begin{bmatrix} -\mu_2 - \lambda_2 & \mu_2 + \lambda_2 \\ \lambda_3 & -\lambda_3 \end{bmatrix}$, amiből az egyensúlyi valószínűségek $[\frac{\lambda_3}{\lambda_3+\mu_2+\lambda_2}, \frac{\mu_2+\lambda_2}{\lambda_3+\mu_2+\lambda_2}]$. Ez alapján a drift feltétel $\frac{\lambda_3}{\lambda_3+\mu_2+\lambda_2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \mu_1) + \frac{\mu_2+\lambda_2}{\lambda_3+\mu_2+\lambda_2}(\lambda_3 + \lambda_4 - \mu_1) < 0$.

2003. Jan. 7.
Tömegkiszolgálás vizsga

5/ Adja meg az M/PH/2/2 sor kimenő folyamatának MAP reprezentációját, ha az érkezési intenzitás λ és a kiszolgálási idő PH eloszlású τ, T paraméterekkel.

Megoldás A sor viselkedését leíró Markov lánc struktúrája:

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\lambda & \lambda\tau & \\ \hline t & T{-}\lambda I & \lambda I \otimes \tau \\ \hline & t \otimes I + I \otimes t & T \oplus T \\ \hline \end{array}\,,$$

ahol $t = -T\mathbb{1}$. A szint csökkenéssel járó átmenetek járnak távozással, így

$$\mathbf{D_0} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline -\lambda & \lambda\tau & \\ \hline & T{-}\lambda I & \lambda I \otimes \tau \\ \hline & & T \oplus T \\ \hline \end{array}\,, \qquad \mathbf{D_1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline t & & \\ \hline & t \otimes I + I \otimes t & \\ \hline \end{array}\,.$$

2003. Jan. 28.
Tömegkiszolgálás vizsga

1a/ Mi a hazárd (vagy intenzitás) függvény ($\lambda(t)$)? Definiálja a hazárd függvényt az eloszlásfüggvény segítségével.
1b/ A hátralévő élettartamra milyen hatása van a növekvő, az állandó, és a csökkenő hazárd függvénynek?
1c/ Felújítási pontból induló felújítási folyamat esetén milyen alakú a felújítási függvény növekvő, állandó, és csökkenő hazárd függvényű érkezési időköz esetén?

Megoldás: 1a/ A hazárd vagy intenzitás függvény egy esemény bekövetkezésének "bekövetkezési sebességét" (δ idő alatti bekövetkezés valószínűsége/δ) adja meg a t időpontban feltéve, hogy az esemént t-ig nem következett be. $\lambda(t) = \frac{f(t)}{1-F(t)}$, ahol $f(t) = \frac{dF(t)}{dt}$.
1b/ Növekvő hazárd függvény esetén a hátralévő élettartam "csökken" (eloszlása úgy változik, hogy pl. minden momentuma csökken), csökkenő hazárd függvény esetén a hátralévő élettartam "nő", míg az állandó hazárd függvény örökifjú eloszlást eredményez.
1c/ A felújítási pontból induló felújítási folyamat felújítási függvénye $1/E(T)$-nél meredekebben indul csökkenő hazárd függvényű érkezési időköz esetén, illetve $1/E(T)$-nél kisebb meredekséggel indul növekvő hazárd függvényű érkezési időköz esetén, és mindkét esetben gyorsan ($E(T)$ előtt) konvergál az $1/E(T)$ meredekeséghez. Állandó hazárd függvényű (azaz exponenciális) érkezési időköz esetén felújítási függvénye pontosan $t/E(T)$ alakú.

3/ Adja meg a QBD folyamatok stabilitásának egyszerűen vizsgálható feltételét. Térjen ki reguláris részen reducibilis fázis folyamat stabilitására is.

Megoldás: A reguláris részen a fázisfolyamat generátora $A = A_2 + A_1 + A_0$. Amennyiben ez a generátor irreducibilis, akkor a stabilitás feltétele, hogy $\alpha A_2 \mathbb{1} > \alpha A_0 \mathbb{1}$, ahol az α vektor a $\alpha A = 0, \alpha \mathbb{1} = 1$ lineális egyenletrendszer megoldása. Ha az $A = A_2 + A_1 + A_0$ generátor irreducibilis, akkor az állapotteret felbontjuk legfeljebb egy tranziens és $n \geq 1$ irreducibilis csoportra. Minden irreducibilis csoportra meghatározzuk az egyensúlyi eloszlást: $\alpha_i, 1 \leq i \leq n$. Ekkor a stabilitás feltétele, hogy minden irreducibilis csoportra teljesüljün, hogy $\alpha_i A_{2i} \mathbb{1} > \alpha_i A_{0i} \mathbb{1}$. A tranziens csoportra nincs megkötés.

4/ Adja meg az M/M/2/3 sor kinemő folyamatát.

Megoldás: A sor viselkedését leíró Markov lánc

$$\mathbf{Q} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -\lambda & \lambda & & \\ \hline \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \\ \hline & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda \\ \hline & & 2\mu & -2\mu \\ \hline \end{array}.$$

A kiszolgálási pillanatokban történi távozás, így

$$\mathbf{D_0} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline -\lambda & \lambda & & \\ \hline & -\lambda-\mu & \lambda & \\ \hline & & -\lambda-2\mu & \lambda \\ \hline & & & -2\mu \\ \hline \end{array}, \qquad \mathbf{D_1} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & & \\ \hline \mu & & & \\ \hline & 2\mu & & \\ \hline & & 2\mu & \\ \hline \end{array}.$$

5/ Mutassa be a folytonos idejű Markov láncok tranziens viselkedésének Markov felújítás elméleten alapuló leírását, és azt, hogy ez megegyezik a rövid idejű viselkedés szerinti leírással.

Megoldás: A fent tárgyal módon a

$$\pi_{ij}(t|T_1 = h) = Pr(X(t) = j \mid X(0) = i, T_1 = h) = \begin{cases} \delta_{ij} & h \geq t \\ \displaystyle\sum_{k \in S, k \neq i} \frac{q_{ik}}{-q_{ii}} \pi_{kj}(t-h) & h < t, \end{cases}$$

egyenletből indulva a

$$\pi_{ij}(t) = \delta_{ij}\ e^{q_{ii}t} + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} \int_{h=0}^{t} \pi_{kj}(t-h)\ e^{q_{ii}h}\ dh$$

egyenletet kapjuk, ami tovább alakítható

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(t) &= \delta_{ij}\ e^{q_{ii}t} + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} \int_{h=0}^{t} \pi_{kj}(h)\ e^{q_{ii}(t-h)}\ dh \\ &= e^{q_{ii}t} \left(\delta_{ij} + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} \int_{h=0}^{t} \pi_{kj}(h)\ e^{-q_{ii}h}\ dh \right). \end{aligned}$$

Mindkét oldal idő szerinti deriváltját véve:

$$\begin{aligned} \pi'_{ij}(t) = \delta_{ij}\ q_{ii}\ e^{q_{ii}t} &+ \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} \left(q_{ii}\ e^{q_{ii}t} \int_{h=0}^{t} \pi_{kj}(h)\ e^{-q_{ii}h}\ dh + e^{q_{ii}t}\ \pi_{kj}(t)\ e^{-q_{ii}t} \right) \\ = \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik}\ \pi_{kj}(t) &+\ q_{ii} \underbrace{\left(\delta_{ij}\ e^{q_{ii}t} + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik}\ e^{q_{ii}t} \int_{h=0}^{t} \pi_{kj}(h)\ e^{-q_{ii}h}\ dh \right)}_{\pi_{ij}(t)} \\ = \sum_{k \in S} q_{ik} \pi_{kj}(t). \end{aligned}$$

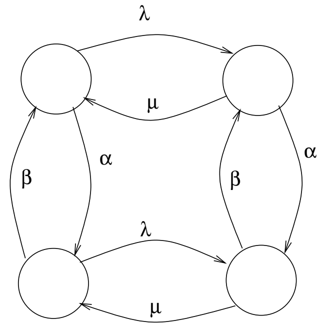
2004. Jan. 8.
Tömegkiszolgálás vizsga

2a/ $X(t)$ és $Y(t)$ két folytonos idejű Markov lánc Q_1, illetve Q_2 generátorral. Rajzolja fel az $\{X(t), Y(t)\}$ Markov lánc állapotátmeneti gráfját és generátor mátrixát.

$$Q_1 = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix}, \qquad Q_2 = \begin{bmatrix} -\alpha & \alpha \\ \beta & -\beta \end{bmatrix}$$

2b/ Definiája a Kronecker összeadás műveletét.

Megoldás: az $\{X(t), Y(t)\}$ Markov lánc állapotátmeneti gráfja és matrixa a következő:



$$Q = \begin{bmatrix} -\lambda-\alpha & \lambda & \alpha & \\ \mu & -\mu-\alpha & & \alpha \\ \beta & & -\lambda-\beta & \lambda \\ & \beta & \mu & -\mu-\beta \end{bmatrix}$$

Kronecker szorzás: $A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}B & \cdots & a_{nn}B \end{bmatrix}$

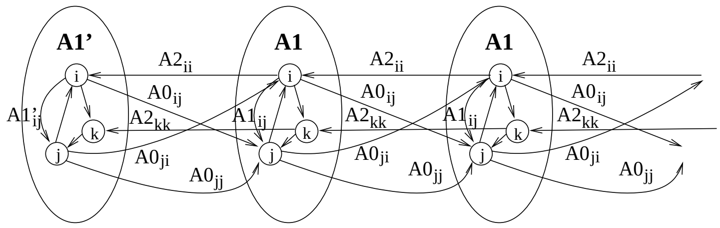
Kronecker összeadás: $A \oplus B = A \otimes I + I \otimes B$

Vegyük észre, hogy

$$Q = Q_2 \oplus Q_2 = Q_2 \otimes I + I \otimes Q_2 = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & & \\ \mu & -\mu & & \\ & & -\lambda & \lambda \\ & & \mu & -\mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha & & \alpha & \\ & -\alpha & & \alpha \\ \beta & & -\beta & \\ & \beta & & -\beta \end{bmatrix},$$

amit úgy lehet értelmezni, hogy az eredő viselkedést olyan átmenetek adják, hogy vagy az első Markov lánc lép és a második nem csinál semmit, vagy második Markov lánc lép és az első nem csinál semmit.

3/ Írja fel az alábbi QBD folyamat tranziens viselkedését leíró differenciál egyenlet ($d/dtP(t) = P(t)Q$) particionált alakját és annak z transzformáltját.



Megoldás:

$$P(t) = \{P_0(t), P_1(t), P_2(t), \ldots\}, \qquad \mathbf{Q} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \mathbf{A_1'} & \mathbf{A_0} & & & \cdots \\ \hline \mathbf{A_2} & \mathbf{A_1} & \mathbf{A_0} & & \\ \hline & \mathbf{A_2} & \mathbf{A_1} & \mathbf{A_0} & \\ \hline & & \mathbf{A_2} & \mathbf{A_1} & \mathbf{A_0} \\ \hline \vdots & & & \ddots & \ddots \\ \hline \end{array}$$

$$\frac{d\ P_0(t)}{dt} = P_0(t)A_1' + P_1A_2,$$
$$\frac{d\ P_1(t)}{dt} = P_0(t)A_0 + P_1A_1 + P_2A_2,$$
$$\frac{d\ P_i(t)}{dt} = P_{i-1}(t)A_0 + P_iA_1 + P_{i+1}A_2,$$

ahonnét

$$\frac{d\ P_i(z,t)}{dt} = P_0(t)\left(A_1' - A_1 - \frac{1}{z}A_2\right) + P(z,t)\left(zA_0 + A_1 + \frac{1}{z}A_2\right).$$

4/ Adja meg stabil M/M/1 sorban a foglalt intervallum hosszának várható értékét (a foglalt időszak első átlépésének vizsgálatával).

Megoldás: A foglalt időszak várható ideje, $E(H)$, egyenlő az n. szintről az $n-1$. szintre lépés várható ideje, így

$$E(H) = Pr(\text{lefelé lépés})E(\text{állapot tartási idő})$$
$$+Pr(\text{felfelé lépés})\Big(E(\text{állapot tartási idő}) + 2E(H)\Big)$$

$$E(H) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\,\frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\,\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu} + 2E(H)\right),$$

ahonnét $E(H) = \frac{1}{\mu-\lambda}$.

5/ Ismertesse az M/G/1, a G/M/1 és a G/G/1 sorok vizsgálatának menetét. Adja meg, hogy milyen beágyazott folyamatok segítségével elemezhetők ezek a sorok. A felsorolt esetek közül melyekben azonos a folytonos idejű és a beágyazott folyamat egyensúlyi viselkedése?

Megoldás: Az M/G/1 sor vizsgálata a távozási pillanatokba ágyazott DTMC alapján történik. Evoluciós egyenet: $X_{n+1} = (X_n - 1)^+ + Y_{n+1}$, ahol X_n az n-edik igény távozása után a rendszerben maradó igények száma és Y_n az n-edik igény kiszolgálása alatt érkező igények száma. Egy igény kiszolgálása alatt érkező igények számának eloszlása: $a_i = \int_{t=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^i}{i!} e^{-\lambda t}\, dB(t)$, ami alapján a beágyazott Markov lánc

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \cdots \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdots \\ & & a_0 & a_1 & \cdots \\ & & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

M/G/1 sor esetén a beágyazott Markov lánc egyensúlyi eloszlása megegyezik a folyamat egyensúlyi eloszlásával (PASTA tulajdonság).

Az G/M/1 sor vizsgálata az érkezési pillanatokba ágyazott DTMC alapján történik. Evoluciós egyenet: $X_{n+1} = (X_n + 1 - Y_{n+1})^+$, ahol X_n az n-edik igény érkezése előtt a rendszerben lévő igények száma és Y_n az n-edik és az $n-1$-edik igények érkezése között kiszolgált igények száma. Egy érkezési időközben kiszolgált igények számának eloszlása: $b_i = \int_{t=0}^{\infty} \frac{(\mu t)^i}{i!} e^{-\mu t}\, dA(t)$, továbbá $c_i = \sum_{i+1}^{\infty} b_k$ ami alapján a beágyazott Markov lánc

$$P = \begin{bmatrix} c_0 & b_0 & & & \\ c_1 & b_1 & b_0 & & \\ c_2 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ c_3 & b_3 & b_2 & b_1 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

G/M/1 sor esetén a beágyazott Markov lánc egyensúlyi eloszlása és a folyamat egyensúlyi eloszlása nem egyezik meg. Az 0. állapot kivételével azonban mindkét eloszlás geometriai.

Az G/G/1 sor viselkedése az üres rendszerbe érkezés kivételével nem tartalmaz emlékezet mentes pillanatot. Ennek a rendszernek a vizsgálata egy folytonos mennyiség elemzését igényli. Ez a folytonos mennyiség a "munkahátralék". A munkahátralék minden érkezési pillanatban az érkező igény kiszolgálási idejével növekszik, és amíg a kiszolgáló dolgozik 1 meredekséggel csökken.
Evoluciós egyenet: $W_{n+1} = (W_n + s_n - t_{n+1})^+$, ahol W_n az n-edik érkezési pillanat előtti munkahátralék, s_n az n-edik igény kiszolgálási ideje, t_n az n-edik érkezési időköz.

2004. Jan. 27.
Tömegkiszolgálás vizsga

1/ Egy csatornára két felhasználó küld egymástól függetlenül csomagokat. Az első felhasználónak két működési állapota van: aktív és passzív. Az aktív állapotban α_1 paraméterű exponenciális ideig tartózkodik, míg a passzívban α_2 paraméterű exponenciális ideig. Az aktív állapotban tartózkodás alatt λ_1, a passzív állapotban tartózkodás alatt λ_2 paraméterű Poisson folyamat szerint generál igényeket. A másik felhasználó ON-OFF viselkedésű β_1 és β_2 paraméterű exponenciális ON illetve OFF periodusokkal. Az ON állapotban tartózkodás alatt γ paraméterű Poisson folyamat szerint generál igényeket, azonban az ON állapotba lépés során p valószínűséggel keletkezik egy igény.

- *1a/ Adja meg az első felhasználó forgalmának MAP reprezentációját.*
- *1b/ Adja meg a második felhasználó forgalmának MAP reprezentációját.*
- *1c/ Adja meg az érkezési pillanatokba ágyazott DTMC állapotátmeneti mátrixát az első felhasználóra.*
- *1d/ Adja meg az érkezési pillanatokba ágyazott DTMC állapotátmeneti mátrixát a második felhasználóra.*
- *1e/ MAP folyamatok halmazán belül mely alosztályba tartozik az első felhasználó? Definiálja a folyamatot az alosztálynak megfelelően.*
- *1f/ MAP folyamatok halmazán belül mely alosztályba tartozik a második felhasználó? Definiálja a folyamatot az alosztálynak megfelelően.*
- *1g/ Adja meg a csatorna forgalmának MAP reprezentációját.*

<u>Megoldás:</u>

- 1a/ $D_0 = \begin{bmatrix} \bullet & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \bullet \end{bmatrix}, \qquad D_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$
- 1b/ $D_0 = \begin{bmatrix} \bullet & \beta_1 \\ (1-p)\beta_2 & \bullet \end{bmatrix}, \qquad D_1 = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ p\beta_2 & 0 \end{bmatrix}.$
- 1c/ $(-D_0)^{-1}D_1 = \dfrac{1}{\alpha_1\lambda_2 + \alpha_2\lambda_1 + \lambda_2\lambda_1} \begin{bmatrix} \alpha_2\lambda_1 + \lambda_2\lambda_1 & \alpha_1\lambda_2 \\ \alpha_2\lambda_1 & \alpha_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_1 \end{bmatrix}.$

- 1d/ $(-D_0)^{-1}D_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
- 1e/ MMPP,$Q = \begin{bmatrix} -\alpha_1 & \alpha_1 \\ \alpha_2 & -\alpha_2 \end{bmatrix}$, $\quad \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{bmatrix}$.
- 1f/ PH felújítási folyamat: $\left\{[1,0], \begin{bmatrix} -\gamma-\beta_1 & \beta_1 \\ (1-p)\beta_2 & -\beta_2 \end{bmatrix}\right\}$.
- 1g/ $D_0 = D_0^{(1)} \oplus D_0^{(2)} = \begin{bmatrix} \bullet & \beta_1 & \alpha_1 & \\ (1-p)\beta_2 & \bullet & & \alpha_1 \\ \alpha_2 & & \bullet & \beta_1 \\ & \alpha_2 & (1-p)\beta_2 & \bullet \end{bmatrix}$,

$$D_1 = D_1^{(1)} \oplus D_1^{(2)} = \begin{bmatrix} \gamma+\lambda_1 & & & \\ p\beta_2 & \lambda_1 & & \\ & & \gamma+\lambda_2 & \\ & & p\beta_2 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

2/ Egy DTMC állapotátmeneti mátrixa a következő:

$$P = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & \dots \\ & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & \dots \\ & & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Irja fel az egyensúlyi egyenletet, és az egyensúlyi eloszlás Z transzformáltját, ha $A(z) = \sum_i a_i z^i$ *és* $B(z) = \sum_i b_i z^i$.

Megoldás:$\pi = \pi P$

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 b_0 + \pi_1 a_0 \\ \pi_1 &= \pi_0 b_1 + \pi_1 a_1 + \pi_2 a_0 \\ \pi_0 &= \pi_0 b_0 + \sum_{k=1}^{i+1} \pi_k a_{i+1-k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi(z) &= \pi_0 B(z) + \pi_1 A(z) + \pi_2 z A(z) + \dots \\ &= \pi_0 B(z) + \frac{\Pi(z)-\pi_0}{z} A(z) \end{aligned}$$

π_0 meghatározása: $\pi_0 = \lim_{z\to 1} \frac{(z-A(z))\Pi(z)}{zB(z)-A(z)} = \lim_{z\to 1} \frac{\frac{d}{dz}((z-A(z))\Pi(z))}{\frac{d}{dz}(zB(z)-A(z))} = \lim_{z\to 1} \frac{(1-A'(z))\Pi(z)+(z-A(z))\Pi'(z)}{B(z)+zB'(z)-A'(z)} = \frac{1-A'(1)}{1+B'(1)-A'(1)}$,
ahol $A'(1) = \sum_{i=0}^{\infty} i\ a_i$ és $B'(1) = \sum_{i=0}^{\infty} i\ b_i$.
Vegyük észre, hogyha $a_i = b_i$, akkor visszakapjuk az M/G/1 sor ismert eredményét, hogy $\pi_0 = 1 - A'(1) = 1 - \rho$.

4/ Egy QBD reguláris részétben a mátrixblokk struktúra A_2, A_1, A_0. Mi a stabilitás feltétele, ha
$A_2 = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_2 & 0 \\ 0 & \gamma & \mu_3 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} \bullet & 0 & 0 \\ 0 & \bullet & \gamma \\ 0 & 0 & \bullet \end{bmatrix}$, $A_0 = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \lambda \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$?

Megoldás: A reguláris részben a fázis folyamat generátora
$A = A_0 + A_1 + A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda-\gamma & \lambda+\gamma \\ 0 & \gamma & -\gamma \end{bmatrix}$
Az ebben a láncban nincs tranziens állapot és két irreducibilis csoport van, a 1. állapot és a 2. és 3. állapot. Az első irreducibilis csoportban a stabilitás feltétele: $\mu_1 > \lambda$. A második csoportban az egyensúlyi eloszlás $\alpha^{(2)} = \left\{ \frac{\gamma}{\lambda+2\gamma}, \frac{\lambda+\gamma}{\lambda+2\gamma} \right\}$. A stabilitás feltétele, hogy $\alpha^{(2)} A_2^{(2)} \mathbb{1} > \alpha^{(2)} A_0^{(2)} \mathbb{1}$, azaz

$$\frac{\gamma\ \mu_2}{\lambda+2\gamma} + \frac{(\lambda+\gamma)(\gamma+\mu_3)}{\lambda+2\gamma} > \frac{\gamma\ 2\lambda}{\lambda+2\gamma} + \frac{(\lambda+\gamma)\ \lambda}{\lambda+2\gamma}$$

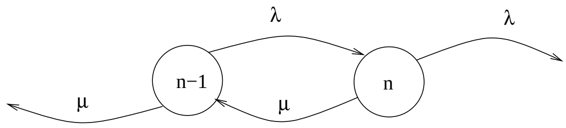
5/ M/M/1 sor tranziens viselkedése:
γ_n jelölje az első időpontot, amikor a folyamat az n. szintre lép ($\gamma_n = \min(t > 0|N(t) = n)$). Adja meg a következő valószínűségeket:

- $Pr(\gamma_{n-1} < \gamma_{n+1}|X(0) = n)$
- $Pr(\gamma_{n-1} < \gamma_{n-2}|X(0) = n)$
- $Pr(X(t) = n-1, \gamma_{n-2} > t, \gamma_{n+1} > t|X(0) = n)$

Megoldás: Ha $n \geq 1$ és stabil a sor ($\lambda < \mu$), akkor

- lefelé lépünk előbb: $Pr(\gamma_{n-1} < \gamma_{n+1}|X(0) = n) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}$

- szintugrás nem lehet: $Pr(\gamma_{n-1} < \gamma_{n-2} | X(0) = n) = 1$
- a keresett mennyiség az alábbi Markov lánc 1-es állapotában tartózkodás valószínűsége a 2-es állapotból indulva.



Így $Pr(X(t) = n-1, \gamma_{n-2} > t, \gamma_{n+1} > t | X(0) = n) = \left[e^{At}\right]_{21}$,

ahol $A = \begin{bmatrix} -\lambda-\mu & \lambda \\ \mu & -\lambda-\mu \end{bmatrix}$.

2005. Jan. 20.
Tömegkiszolgálás vizsga

1/ Egy egy kiszolgálós két tárhelyet tartalmazó sorba két MAP folyamatból ($\hat{D}_0, \hat{D}_1$ és $\bar{D}_0, \bar{D}_1$) érkeznek igények. Az igények kiszolgálási ideje μ paraméterű exponenciális eloszlású. A kiszolgálás után az igények p valószínűséggel az A és $1-p$ valószínűséggel a B kimenet felé távoznak. Adja meg az A és B kimenetek forgalmát, ha

$$\hat{D}_0 = \begin{bmatrix} \bullet & \alpha_1 \\ \alpha_2 & \bullet \end{bmatrix}, \quad \hat{D}_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad \textit{és}$$

$$\bar{D}_0 = \begin{bmatrix} \bullet & \beta_1 \\ (1-p)\beta_2 & \bullet \end{bmatrix}, \quad \bar{D}_1 = \begin{bmatrix} \gamma & 0 \\ p\beta_2 & 0 \end{bmatrix}.$$

<u>Megoldás:</u>
Az két érkezési folyamat eredője szintén MAP, ahol $\tilde{D}_0 = \hat{D}_0 \oplus \bar{D}_0$ és $\tilde{D}_1 = \hat{D}_1 \oplus \bar{D}_1$. Így a vizsgált sor egy MAP/M/2/2, aminek generátor mátrixa:

$$Q = \begin{bmatrix} \tilde{D}_0 & \tilde{D}_1 & \\ \mu I & \tilde{D}_0 - \mu I & \tilde{D}_1 \\ & 2\mu I & \tilde{D}_0 + \tilde{D}_1 - 2\mu I \end{bmatrix}$$

aminek távozási folyamata a következő MAP

$$\check{D}_0 = \begin{bmatrix} \tilde{D}_0 & \tilde{D}_1 & \\ & \tilde{D}_0 - \mu I & \tilde{D}_1 \\ & & \tilde{D}_0 + \tilde{D}_0 - 2\mu I \end{bmatrix} \quad \check{D}_1 = \begin{bmatrix} & & \\ \mu I & & \\ & 2\mu I & \end{bmatrix}.$$

Végül mindkét kimenet forgalam MAP a következő paraméterekkel. Az A kimenet forgalma $D_0^A = \check{D}_0 + (1-p)\check{D}_1$, $D_1^A = p\check{D}_1$, a B kimenet forgalma $D_0^A = \check{D}_0 + p\check{D}_1$, $D_1^A = (1-p)\check{D}_1$.

2/ M/G/1 sor foglaltsági periódusának eloszlása, ha az érkezési intenzitás λ és a kiszolgálási idő sűrűség függvényének Laplace transzformáltja $b^*(s)$.

<u>Megoldás:</u> Jelölje a_i annak valószínűségét, hogy egy kiszolgálási idő alatt i db igény érkezik. Tekintsük a foglaltsági periódust az első kiszolgálási idő végén. Ekkor a_0 valószínűséggel kiürül a sor, és vége a foglaltsági periódusnak, a_1 valószínűséggel egy igény marad a sorban, tehát a hátralévő foglaltsági idő ugyan az mint kezdetben, a_2 valószínűséggel két igény marad a sorban. Ekkor egy foglaltsági idő kell ahhoz, hogy

először a elérje a rendszer, hogy csak egy igényt tartalmaz, majd innét egy foglaltsági idő múlva kiürül, és így tovább. Összességében a foglaltsági idő eloszlásának Laplace transzformáltja, $h^*(s)$, kielégíti a következő egyenletet:

$$\begin{aligned} h^*(s) &= a_0 b^*(s) + a_1 b^*(s) h^*(s) + a_2 b^*(s) h^*(s)^2 + \dots \\ &= b^*(s) \sum_{i=0}^{\infty} a_i h^*(s)^i \end{aligned}$$

3/ Az alábbi CTMC generátor mátrixban a betűk mátrix blokkokat jelentenek. A blokkok sorszámozása: $0, 1, 2, \dots, m$.

- *Írja fel egyensúlyi egyenleteket.*
- *Adja meg az egyensúlyi eloszlás kiszámításának módját.*
- *Mutassa meg, hogy a javasolt egyensúlyi megoldás kielégíti az egyensúlyi egyneleteket.*

$$Q = \begin{bmatrix} A_1^* & A_0^* & & & & \\ A_2^* & A_1 & A_0 & & & \\ & A_2 & A_1 & A_0 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & A_2 & A_1 & A_0 \\ & & & & A_2 & A_1^{\sim} \end{bmatrix}$$

Megoldás: Az egyensúlyi megoldás a $\pi Q = 0$ egynelet $\pi \mathbb{1} = 1$ feltétel melletti megoldása. Particionáljuk a π vektort a Q-ban szereplő mátrix blokkok méretének megfelelően. Ekkor az egyensúlyi egyenlet particionált alakja:

$$\boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{A}_1^* + \boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{A}_2^* = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\pi}_0 \boldsymbol{A}_0^* + \boldsymbol{\pi}_1 \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{\pi}_2 \boldsymbol{A}_2 = \mathbf{0}$$

$$\boldsymbol{\pi}_{n-1} \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{\pi}_n \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{\pi}_{n+1} \boldsymbol{A}_2 = \mathbf{0} \qquad 2 \le n \le m-1$$

$$\boldsymbol{\pi}_{m-1} \boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{\pi}_m \boldsymbol{A}_1^{\sim} = \mathbf{0}$$

$$\sum_{n=0}^{m} \boldsymbol{\pi}_n \mathbb{1} = 1$$

Az általános egyenlet ($2 \le n \le m-1$) megoldását a következő alakban keressük:

$$\boldsymbol{\pi}_n = \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{R}^{n-1} + \boldsymbol{\beta} \boldsymbol{S}^{m-n}, \quad \forall 1 \le n \le m,$$

ahol

$$\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{R}^2\boldsymbol{A}_2 = \mathbf{0}\ ,\ \boldsymbol{A}_2 + \boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{S}^2\boldsymbol{A}_0 = \mathbf{0}\ .$$

Ez a megoldás minden $\boldsymbol{\alpha}$ és $\boldsymbol{\beta}$ esetén teljesíti az általános általános egyenlet ($2 \leq n \leq m-1$), így maradt 3 egyenletünk (1., 2., 4.) a három ismeretlen ($\boldsymbol{\pi}_0$, $\boldsymbol{\alpha}$ és $\boldsymbol{\beta}$) meghatározására, ami a következő lineális egyenlet rendszerre és normalizáló feltételre vezet:

$$[\boldsymbol{\pi}_0 \mid \boldsymbol{\alpha} \mid \boldsymbol{\beta}] \begin{array}{|c|c|c|}\hline \boldsymbol{A}_1^* & \boldsymbol{A}_0^* & \\ \hline \boldsymbol{A}_2^* & \boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{R}^{m-2}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{R}^{m-1}\boldsymbol{A}_1^{\sim} \\ \hline & \boldsymbol{S}^{m-1}\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{S}^{m-1}\boldsymbol{A}_2 & \boldsymbol{S}\boldsymbol{A}_0 + \boldsymbol{A}_1^{\sim} \\ \hline \end{array} = [\mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0}]$$

$$\boldsymbol{\pi}_0 + \boldsymbol{\alpha} \sum_{n=0}^{m-1} \boldsymbol{R}^n \mathbb{1} + \boldsymbol{\beta} \sum_{n=0}^{m-1} \boldsymbol{S}^n \mathbb{1} = 1$$

4/ Adjon meg két numerikus eljárást az $A_0G^2 + A_1G + A_2 = 0$ mátrixegyenlet minimális nem negatív megoldásának meghatározására.
Ismertesse mi történik a numerikus eljárásokkal, ha 0-visszatérő és nem visszatérő Markov lánchoz tartozó A_0, A_1, A_2 mátrixok esetén keressük a megoldást.

Megoldás: "Üres" **G** mátrix feltöltése:

$$\begin{array}{l} \mathbf{G} := \mathbf{0}; \\ \mathbf{REPEAT} \\ \quad \mathbf{G} := (-\mathbf{A_1} - \mathbf{A_0}\mathbf{G})^{-1}\,\mathbf{A_2}; \\ \mathbf{UNTIL} ||\mathbb{1} - \mathbf{G}\mathbb{1}|| \leq \epsilon \end{array}$$

G mátrix elemeinek "rendezése":

$$\begin{array}{l} \mathbf{G} := \mathbf{I}; \\ \mathbf{REPEAT} \\ \quad \mathbf{G}_{old} := \mathbf{G}; \\ \quad \mathbf{G} := (-\mathbf{A_1} - \mathbf{A_0}\mathbf{G})^{-1}\,\mathbf{A_2}; \\ \mathbf{UNTIL} ||\mathbf{G} - \mathbf{G}_{old}|| \leq \epsilon \end{array}$$

Null visszatérő folyamat esetén a **G** mátrix stochasztikus, míg nem visszatérő folyamat esetén a **G** mátrix szub-sztochasztikus.

Így az első eljárás null visszatérő folyamat esetén elméletileg konvergálhat, de gyakorlatban az iteráció szám lehet kivárhatatlanul nagy. Ugyan ez az eljárás nem visszatérő folyamat esetén elvileg sem konvergál (ϵ megfelelően kis értéke mellett).
A második eljárás elvileg mindkét esetben konvergálhat, de a kapott eredmény mindig stochastikus matrix, azaz nem visszatérő folyamat esetén biztosan hibás eredményt ad.

5/ Az alábbi CTMC generátor mátrixban a betűk mátrix blokkokat jelentenek. A blokkok sorszámozása: $0, 1, 2, \ldots$. *Adja a 0 szintre megszorított Markov lánc generátor mátrixát.*

$$Q = \begin{bmatrix} A_1^* & A_0 & & & \\ A_2 & A_1 & A_0 & & \\ & A_2 & A_1 & A_0 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

Megoldás: $Q_0 = A_1^* + A_0 G$, mivel a 0 szintre megszorítot folyamatban kétféle átmenet lehetséges:

- az eredeti folyamat 0 szinten belüli átmenete vagy
- az eredeti folyamat fellép az 1-es szinter és onnét idővel visszatér a 0 szintre.

2005. Jan. 27.
Tömegkiszolgálás vizsga

1/ Egy DTMC állapotátmeneti mátrixa a következő:

$$P = \begin{bmatrix} c_0 & b_0 & & & & & \\ c_1 & b_1 & b_0 & & & & \\ c_2 & b_2 & b_1 & b_0 & & & \\ c_3 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & & \\ c_4 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & b_0 & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \end{bmatrix}$$

-Írja fel az egyensúlyi egyenleteket.
-Az egyensúlyi egyenletek alapján találja ki a megolodás alakját.
-Igazolja, hogy a megoldás kielégíti az egyensúlyi egyenleteket.

Megoldás:
- Egyensúlyi egyenletek:

$$\pi_0 = \pi_0 c_0 + \pi_1 c_1 + \ldots = \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i c_i$$

$$\pi_k = \pi_{k-1} b_0 + \pi_k b_1 + \ldots = \sum_{i=k-1}^{\infty} \pi_i b_{i-k+1} \qquad k \geq 1$$

-Megoldás alakja: Keressük a megoldást $\pi_k = \sigma \pi_{k-1} = (1-\sigma)\sigma^k$, alakban, amit az általános egyenletbe helyettesítve $\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i b_i$ adódik.
-Ellenőrzés: Az általános egyenletet ($k \geq 1$) teljesíti a megoldás (mivel σ-t úgy határoztuk meg), így csak a speciális (0-dik) egyenletet kell ellenőrizni. $c_i = 1 - \sum_{j=0}^{i} b_j$, mivel a P mátrix sorösszege 1. Ez alapján az egynelet:

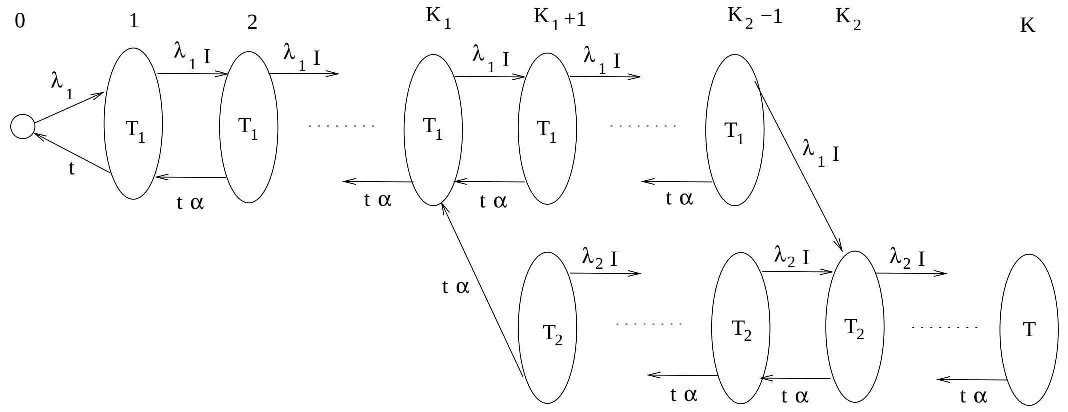
$$1-\sigma = \sum_{i=0}^{\infty} (1-\sigma)\sigma^i c_i = (1-\sigma)\left(\sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i - \sum_{i=0}^{\infty} \sigma^i \sum_{j=0}^{i} b_j\right) =$$

$$1 - (1-\sigma)\sum_{j=0}^{\infty} b_j \sum_{i=j}^{\infty} \sigma^i = 1 - \sum_{j=0}^{\infty} b_j \sigma^j$$

amibe $\sigma = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \sigma^j$-t helyettesítve azonosság adódik.

2/ Egy M/PH/1/K sor vezérlése olyan, hogy üres pufferből indulva az érkezési intenzitás λ_1 mindaddig, amíg a sorhosz eléri a K_2 szintet. Ekkortól λ_2 az érkezési intenzitás mindaddig, amíg a sorsosz eléri K_1 szintet, ahonnét ismét λ_1 az érkezési intenzitás, és így tovább. $0 < K_1 < K_2 < K$. A kiszolgálási idő $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{T}$ paraméterű PH eloszlású. Adja meg a sor viselkedését leíró Markov láncot.

Megoldás: A Markov lánc struktúrája és generátor mártixa a következő:



$\boldsymbol{Q} =$

0	1	2	$\cdots$	K_1	K_1+1	$\cdots$	K_2–1	K_2	$\cdots$	K
$-\lambda_1$	$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}$									
$\boldsymbol{t}$	$\boldsymbol{T}_1$	$\lambda_1\boldsymbol{I}$								
	$\boldsymbol{t\alpha}$	$\boldsymbol{T}_1$	$\lambda_1\boldsymbol{I}$							
		$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$						
			$\boldsymbol{t\alpha}$	$\boldsymbol{T}_1$	$\lambda_1\boldsymbol{I}$					
				$\boldsymbol{t\alpha}$ $\boldsymbol{t\alpha}$	$\boldsymbol{T}_1$ $\boldsymbol{T}_2$	$\lambda_1\boldsymbol{I}$ $\lambda_2\boldsymbol{I}$				
					$\ddots$ $\ddots$	$\ddots$ $\ddots$	$\ddots$ $\ddots$			
						$\boldsymbol{t\alpha}$ $\boldsymbol{t\alpha}$	$\boldsymbol{T}_1$ $\boldsymbol{T}_2$	$\lambda_1\boldsymbol{I}$ $\lambda_2\boldsymbol{I}$		
							$\boldsymbol{t\alpha}$	$\boldsymbol{T}_2$	$\lambda_2\boldsymbol{I}$	
								$\ddots$	$\ddots$	$\ddots$
									$\boldsymbol{t\alpha}$	$\boldsymbol{T}$

ahol $\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{T}\mathbb{1}$, $\boldsymbol{T}_1 = \boldsymbol{T}-\lambda_1\boldsymbol{I}$ és $\boldsymbol{T}_2 = \boldsymbol{T}-\lambda_2\boldsymbol{I}$.

3/ Egy PH/M/2/4 sor érkezési időköze $\alpha, \boldsymbol{T}$ paraméterű PH eloszlású, és kiszolgálási ideje μ paraméterű exponenciális eloszlású.
-Adja meg a sor elvesző igény folyamatát.
-Adja meg az elvesző igény folyamat átlagos intenzitását.
-Mikor lesz a távozó folyamat intenzitása kisebb mint az elvesző folyamaté.

Megoldás: A PH/M/2/4 sort leíró Markov lánc generátor mátrixa

$$\boldsymbol{Q} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \boldsymbol{T} & t\alpha & & & \\ \hline \mu\boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}-\mu\boldsymbol{I} & t\alpha & & \\ \hline & 2\mu\boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}-2\mu\boldsymbol{I} & t\alpha & \\ \hline & & 2\mu\boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}-2\mu\boldsymbol{I} & t\alpha \\ \hline & & & 2\mu\boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}+t\alpha-2\mu\boldsymbol{I} \\ \hline \end{array}$$

Az elvesző igényfolyamat MAP reprezentációja:

$$\boldsymbol{D}_0 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \boldsymbol{T} & t\alpha & & & \\ \hline \mu\boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}-\mu\boldsymbol{I} & t\alpha & & \\ \hline & 2\mu\boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}-2\mu\boldsymbol{I} & t\alpha & \\ \hline & & 2\mu\boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}-2\mu\boldsymbol{I} & t\alpha \\ \hline & & & 2\mu\boldsymbol{I} & \boldsymbol{T}-2\mu\boldsymbol{I} \\ \hline \end{array} \qquad \boldsymbol{D}_1 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & \\ \hline & & & & t\alpha \\ \hline \end{array}$$

- Az elvesző igényfolyamat átlagos intenzitása: $\lambda = PD_1\mathbb{1}$, ahol P a Markov lánc egyensúlyi eloszlása ($PQ = 0$, $P\mathbb{1} = 1$), mivel csak a 4-dik szinten történhet "érkezés" az elvesző igény folyamatban, ezért $\lambda = P_4 t\alpha\mathbb{1} = P_4 t$, ahol P_4 az egyensúlyi eloszlás vektor 4-dik szinthez tartozó része.
- Ha távozó folyamat intenzitása: $\lambda_t = \mu(P_1 + 2P_2 + 2P_3 + 2P_4)\mathbb{1}$ tehát a feltétel:

$$\mu(P_1 + 2P_2 + 2P_3 + 2P_4)\mathbb{1} < P_4 t.$$

4/ Ismertesse a G/G/1 sor elemzését.

Megoldás: Jegyzetben.