

SZÁMÍTÓGÉP RENDSZEREK TELJESÍTMÉNYELEMZÉSE

Budapesti Műszaki Egyetem

Telek Miklós

Horváth András

2000.

Tartalomjegyzék

1. BEVEZETÉS	1
2. SZTOCHASZTIKUS RENDSZEREK VISELKEDÉSE	3
2.1. Sztochasztikus folyamatok	3
2.1.1. Markov tulajdonság	4
2.1.2. Időben homogén viselkedés	4
2.2. Folytonos idejű Markov láncok	5
2.2.1. Analízis a rövid idejű viselkedés alapján	6
2.2.2. Analízis az állapot átlépések alapján	8
2.3. Szemi-Markov folyamat	11
2.3.1. Analízis az állapot átlépések alapján	12
2.3.2. Tranziens viselkedés vizsgálata segédváltozók módszerével	14
2.4. Markov regeneratív folyamat	19
2.4.1. Tranziens viselkedés felújítási pillanatok vizsgálata alapján	21
2.5. További speciális sztochasztikus folyamatok	23
2.5.1. Felújítási folyamat	23
2.5.2. Poisson folyamat	24
2.6. Sztochasztikus folyamatok összefoglalása	24
3. HOZAMMODELLEK	27
3.1. Hozam modellezés	27
3.1.1. Felhalmozott hozam	27
3.1.2. Teljesítési idő	30
3.2. Markovi rátahozam modellek	31
3.2.1. Felhalmozott hozam – hozamvesztés mentes eset	31
3.2.2. Teljesítési idő – veszteségmentes eset	35
3.2.3. Teljes munkavesztéses rendszerek	38
3.3. Markovi impulzus- és rátahozam modellek	44
3.3.1. Felhalmozott hozam	45

3.3.2. Teljesítési idő	46
3.4. Szemi-Markov rátahozam modellek	46
3.5. A felhalmozott hozam momentumai	48
3.5.1. A felhalmozott rátahozam várható értéke	48
3.5.2. A felhalmozott rátahozam második momentuma	49
3.5.3. A felhalmozott impulzus- és rátahozam átlaga	50
A. A Laplace és Laplace-Stieltjes transzformáltak néhány tulajdonsága	53
B. Deriválási szabályok	57
Irodalomjegyzék	59

1. fejezet

BEVEZETÉS

A számítógép rendszerek fejlődése, a távközlési és a számítástechnikai rendszerek integrációja számos olyan új technikai megoldás bevezetését eredményezte, amelyek teljesítményének elemzése aránylag bonyolult modellezési ismereteket és matematikai apparátust igényel. Ebben a jegyzetben egy, a valóságos rendszerek teljesítményelemzésére aránylag általánosan használható modellezési eszközt, és az ahhoz tartozó analízis módszereket foglaljuk össze. Az ismertetésre kerülő módszerek a következő feltételek teljesülése esetén alkalmazhatóak:

- a vizsgált valós rendszerek viselkedésének véges sok állapotát különböztetjük meg;
- az egyes állapotokban állandó teljesítménnyel dolgozik a rendszer;
- a rendszer állapotátmeneteikor munkavesztés vagy pillanatnyi munkafelhalmozás lehetséges;
- a rendszer viselkedése, azaz az egyes működési állapotok közti "vándorlás" egy ismert sztochasztikus folyamat.

A felsorolt feltételeket teljesítő rendszerek teljesítmény jellemzőit hozam modellek (angolul *reward models*) segítségével számíthatjuk ki. A hozam modellekkel történő teljesítményelemzés főbb lépései a következők:

- a rendszerről rendelkezésre álló (megfigyelhető, mérhető, a tervezési folyamat és az alkalmazott technológia alapján becsülhető) ismeretek alapján meghatározzuk a rendszer viselkedését leíró sztochasztikus folyamatot,
- meghatározzuk a különböző rendszerállapotokban végzett munka mennyiségét és a rendszer állapotátmeneteiben bekövetkező változásokat,

- végül ezen adatok alapján kiszámítjuk a vizsgált rendszer keresett teljesítményjellemzőit.

Ebben az anyagban a teljesítményelemzésre általánosan alkalmazott sztochasztikus folyamatok, majd a hozam modellek és azok tipikus teljesítmény jellemzőinek bemutatása után elsősorban e teljesítményjellemzők meghatározásának módszereit foglaljuk össze.

Az alábbiakban ismertetett tananyag a Budapesti Műszaki Egyetem Villamosmérnöki és Informatikai Karán az 1998/1999-es tanévben azonos címmel előadott doktorandusz tárgy anyagát tartalmazza. Ezúton is szeretném megköszönni a tárgy hallgatóinak aktív együttműködését.

2. fejezet

SZTOCHASZTIKUS RENDSZEREK VISELKEDÉSE

Ebben a fejezetben a számítógép rendszerek elemzése során leggyakrabban alkalmazott folyamatok később felhasznált tulajdonságait foglaljuk össze, és egyúttal megismerkedünk a teljesítményelemzésben alkalmazott matematikai módszerek egy részével is.

Először a legszélesebb körben alkalmazott rendszermodell, a folytonos idejű Markov lánc viselkedését ismételjük át. A későbbiekben tárgyalásra kerülő szemi-Markov és Markov regeneratív folyamat is tekinthető a folytonos idejű Markov láncok általánosításának, így amennyire lehetséges, hasonló módszerekkel írjuk le viselkedésüket. A folyamatok ismertetése során elsődleges szempontnak tekintettük, hogy a témakörben nem különösebben járatos műszaki érdeklődésű olvasók számára is érthető leírást adjunk. Ennek érdekében a matematikai szempontból érdekes, de műszaki alkalmazásokban nem jellemző esetek tárgyalásától eltekintünk, és törekszünk egy fizikai viselkedésen alapuló szemléletes tárgyalást nyújtani.

2.1. Sztochasztikus folyamatok

Sztochasztikus folyamatokon a valószínűségi változók bizonyos általánosítását értjük. Egy ún. paraméter halmaz minden eleméhez hozzárendelünk egy valószínűségi változót, amely valószínűségi változók egy \mathcal{S} értékkészlet halmazból vehetnek fel értékeket. Műszaki életben a leggyakrabban alkalmazott paraméter halmaz az időtengely, és az \mathcal{S} halmazt általában állapottérnek nevezik. Abban az esetben, ha az adott műszaki problémát diszkrét idejűnek tekintjük, azaz csak kitüntetett időpillanatokban érdekel bennünket a rendszer viselkedése, akkor diszkrét idejű sztochasztikus folyamatról beszélünk, ellenkező esetben folytonos idejűről. A műszaki gyakorlatban azt mond-

juk, hogy a vizsgált rendszer a t időpillanatban az i -edik állapotban tartózkodik, ha a t értékhez rendelt valószínűségi változó értéke i . Ebben az anyagban az időtengely pozitív elemein értelmezett sztochasztikus folyamatokkal foglalkozunk.

Egy sztochasztikus folyamat definiálásához meg kell adni a folyamat összes véges dimenziós együttes eloszlását, azaz $\forall n \geq 1$ -re, $\forall 0 \leq t_1 < \dots < t_n$ -re és $\forall x_1, \dots, x_n \in S$ -re a $\mathbf{P}(X(t_1) = x_1, \dots, X(t_n) = x_n)$ valószínűséget.

Azt mondjuk, hogy az $X(t)$ folyamat megegyezik $Y(t)$ -vel, azaz $X(t) \equiv Y(t)$, ha a két folyamat összes véges dimenziós együttes eloszlása megegyezik. Általában nem igaz az, hogy egy sztochasztikus folyamatot meghatároz az elsőfokú –tranzienst– ($n = 1$), vagy a másodfokú –pl. autokorreláció– ($n = 2$) viselkedése, bár vannak olyan speciális folyamatok, amelyek esetén ez teljesül.

2.1.1. Markov tulajdonság

2.1. Definíció. Az $X(t)$ folyamat t_n pillanatban teljesíti a Markov tulajdonságot, ha $\forall n, m \geq 1$ -re, $\forall 0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} < \dots < t_{n+m}$ -re és $\forall x_0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m} \in S$ -re

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(t_{n+m}) = x_{n+m}, \dots, X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n, \dots, X(t_0) = x_0) = \\ \mathbf{P}(X(t_{n+m}) = x_{n+m}, \dots, X(t_{n+1}) = x_{n+1} | X(t_n) = x_n). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Fizikai magyarázat: a t_n időpontot, az utolsó pillanatot, amelyben ismerjük a folyamat értékét, tekintve a jelen pillanatnak a Markov tulajdonság azt fejezi ki, hogy a folyamat múltbeli ($t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1}$) viselkedése nem befolyásolja a jövőbeli ($t_{n+1} < \dots < t_{n+m}$) viselkedést, hanem a jövőbeli viselkedés független a múlttól, és csak a jelen x_n állapottól függ.

2.2. Megjegyzés. Olyan folyamatok esetén, amelyekre minden időpontban teljesül a Markov tulajdonság, elegendő egy jövőbeni időpillanatra ($m = 1$) vizsgálni a feltétel teljesülését.

2.3. Megjegyzés. Mivel csak az időtengely pozitív elemein értelmezett sztochasztikus folyamatokkal foglalkozunk, így azt feltételezzük, hogy a Markov tulajdonság teljesül a $t = 0$ pillanatban.

2.1.2. Időben homogén viselkedés

2.4. Definíció. Az $X(t)$ folyamatot időben homogénnek nevezzük, ha az $X(t)$ folyamat és a tetszőleges s időeltolással nyert $X'(t) = X(t + s)$ folyamat azonos kiindulási feltételek mellett megegyezik, azaz $X(t) \equiv X'(t)$.

2.5. Következmény. Ha az $X(t)$ homogén sztochasztikus folyamat a T pillanatban az i állapotban teljesíti a Markov tulajdonságot, akkor $X(t) \equiv X(t - T)$ feltéve, hogy $X(0) = i$ (ugyanis az azonos kiindulási feltételeket biztosítja az azonos állapotban teljesülő Markov tulajdonság.)

2.2. Folytonos idejű Markov láncok

2.6. Definíció. Az $X(t)$ diszkrét állapotú folytonos idejű sztochasztikus folyamatot folytonos idejű Markov láncnak nevezzük, ha minden $t \geq 0$ időpillanatban teljesíti a Markov tulajdonságot.

Ennek a definíciónak a felhasználásával, időben homogén folyamatot feltételezve, a következő tulajdonságok adódnak:

2.7. Következmény. Tetszőleges véges dimenziós eloszlás megadható a kezdeti eloszlás és az átlépési valószínűségek szorzataként.

2.8. Következmény. A $t < u < v$ időpontokra vonatkozó Chapman-Kolmogorov egyenlet:

$$\hat{p}_{ij}(t, v) = \sum_{l \in S} \hat{p}_{il}(t, u) \hat{p}_{lj}(u, v); \quad \hat{\Pi}(t, v) = \hat{\Pi}(t, u) \hat{\Pi}(u, v) \quad (2.2)$$

ahol $\hat{p}_{ij}(t, u) = \mathbf{P}(X(u) = j \mid X(t) = i)$, $\forall i, j \in S, \forall 0 \leq t \leq u$, $\hat{\Pi}(t, u) = [\hat{p}_{ij}(t, u)]$. Homogén folyamat esetén a $u - t = \tau_1$ és $v - u = \tau_2$ időkülönbségek mellett

$$p_{ij}(\tau_1 + \tau_2) = \sum_{l \in S} p_{il}(\tau_1) p_{lj}(\tau_2); \quad \mathbf{\Pi}(\tau_1 + \tau_2) = \mathbf{\Pi}(\tau_1) \mathbf{\Pi}(\tau_2) \quad (2.3)$$

ahol $\mathbf{\Pi}(\tau) = [p_{ij}(\tau)]$, $p_{ij}(\tau) = \mathbf{P}(X(\tau) = j \mid X(0) = i)$, $\forall i, j \in S, \forall 0 \leq \tau$

2.9. Definíció. A folytonos idejű Markov láncok viselkedését meghatározó mennyiség, az infinitezimális generátor mátrix (\mathbf{Q} mátrix) az állapotátmeneti valószínűség deriváltjából származtatható:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{\Pi}(t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{\Pi}(t + \delta) - \mathbf{\Pi}(t)}{\delta} = \mathbf{\Pi}(t) \underbrace{\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{\Pi}(\delta) - \mathbf{I}}{\delta}}_{\mathbf{Q}} = \mathbf{\Pi}(t) \mathbf{Q} \quad (2.4)$$

2.10. Következmény. Az állapotokban tartózkodás ideje exponenciális eloszlású ($q_i = -q_{ii}$ paraméterrel), és a következő állapot adott eloszlás (q_{ij}/q_i) szerint kerül kiválasztásra az állapotban eltöltött időtől függetlenül.

2.11. Megjegyzés. Az exponenciális eloszlás tulajdonságai alapján úgy is tekinthetjük a Markov lánc átmeneteit, mintha az i állapotból az összes lehetséges szomszédos j állapotba az adott állapotnak megfelelő q_{ij} paraméterű exponenciális idő alatt léphetne át a folyamat, és ezek közül a lehetséges átlépések közül az első következik be.

2.12. Következmény. Markov láncok rövid idejű viselkedése:

$$a/ \mathbf{P}(X(t + \Delta) = i | X(t) = i) = 1 - q_i \Delta + o(\Delta)$$

$$b/ i \neq j \text{ esetén } \mathbf{P}(X(t + \Delta) = j | X(t) = i) = q_{ij} \Delta + o(\Delta)$$

$$c/ i \neq k, j \neq k \text{ és } t < u < t + \Delta \text{ esetén } \mathbf{P}(X(t + \Delta) = j, X(u) = k | X(t) = i) = o(\Delta)$$

Azaz rövid idő alatt érdemben vagy nem történik állapot átmenet (a/), vagy egy átmenetet történik (b/). Annak valószínűsége, hogy több mint egy átmenet történik (c/) elhanyagolhatóvá válik, ahogy $\Delta \rightarrow 0$.

Az utóbbi két következmény alapján két különböző analízis technika alkalmazható folytonos idejű Markov láncok elemzésére.

2.2.1. Analízis a rövid idejű viselkedés alapján

Tekintsük az $X(t) \in S$ folytonos idejű Markov láncot és vizsgáljuk a $P_i(t) = \mathbf{P}(X(t) = i)$ állapotvalószínűségének megváltozását Δ idő alatt:

- Nem történik átmenet az intervallumban, azaz a folyamat az i állapotban volt a t időpontban. Ennek valószínűsége $1 - q_i \Delta + o(\Delta)$, ahol $o(x)$ olyan függvény, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} o(x)/x = 0$.
- Egy átlépés történik az adott intervallumban: a folyamat az i állapotba valamely másik k ($k \neq i$) állapotból lépett át. Ezen esemény valószínűsége $q_{ki} \Delta + o(\Delta)$.
- A folyamat úgy jutott az i állapotba, hogy a $(t, t + \Delta)$ intervallumban kettő vagy annál több állapotátmenet történt. Ennek valószínűsége $o(\Delta)$.

A $p_k(t)$, $k \in S$, valószínűségek valamint az előzőekben felsorolt események segítségével kifejezhető annak az eseménynek a valószínűsége, hogy a folyamat a $(t + \Delta)$ időpontban az i állapotban tartózkodik.

$$\begin{aligned}
P_i(t + \Delta) &= (1 - q_i\Delta + o(\Delta))P_i(t) + \sum_{k \in S, k \neq i} (q_{ki}\Delta + o(\Delta))P_k(t) + o(\Delta) \\
&= (1 - q_i\Delta)P_i(t) + \sum_{k \in S, k \neq i} (q_{ki}\Delta)P_k(t) + o(\Delta),
\end{aligned}$$

amiből

$$\frac{P_i(t + \Delta) - P_i(t)}{\Delta} = -q_i P_i(t) + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ki} P_k(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta} = \sum_{k \in S} q_{ki} P_k(t) + \frac{o(\Delta)}{\Delta}.$$

Végül a $\Delta \rightarrow 0$ határátmenetet képezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{dP_i(t)}{dt} = \sum_{k \in S} q_{ki} P_k(t)$$

Bevezetve a $\underline{P}(t) = \{P_i(t)\}, i \in S$ sorvektort, az alábbi vektor egyenlet adódik:

$$\frac{d}{dt}\underline{P}(t) = \underline{P}(t)\mathbf{Q}.$$

A tranziens viselkedés megadásához a differenciálegyenleten kívül szükséges még egy kezdeti feltétel. Gyakorlatban a folyamat $t = 0$ pillanatban adott $\underline{P}(0)$ kezdeti eloszlását szokták kezdeti feltételként alkalmazni. A fenti differenciálegyenlet adott kezdeti feltétel melletti megoldása a következő [5]:

$$\underline{P}(t) = \underline{P}(0)e^{\mathbf{Q}t} = \underline{P}(0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}^n t^n}{n!}$$

Transzformált tartománybeli leírás

A tranziens viselkedés differenciálegyenlettel adott leírása egyszerűen Laplace transzformálható:

$$s \underline{P}^*(s) - \underline{P}(0) = \underline{P}^*(s)\mathbf{Q},$$

amiből $\underline{P}^*(s)$ -t kifejezve:

$$\underline{P}^*(s) = \underline{P}(0)[s\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}.$$

Az idő- és a transzformált tartománybeli eredmények összevetéséből látható, hogy $e^{\mathbf{Q}t}$ és $[s\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1}$ egymás transzformált párjai.

Egyensúlyi viselkedés

Ha a $\lim_{t \rightarrow \infty} P_i(t) = P_i$ határérték létezik, akkor $\lim_{t \rightarrow \infty} dP_i(t)/dt = 0$ és az egyensúlyi eloszlás kielégíti a $\sum_{k \in S} q_{ki} P_k(t) = 0$ egyenletet.

2.2.2. Analízis az állapot átlépések alapján

Tekintsük az $X(t) \in S$ folytonos idejű Markov láncot. Jelölje T_1, T_2, T_3, \dots az állapotátmenetek időpontjait (definíció szerint $T_0 = 0$), és $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ az egymás utáni állapotokban eltöltött időt ($\tau_i = T_i - T_{i-1}$). Vizsgáljuk a $\pi_{ij}(t)$ állapotátmeneti valószínűséget, feltételezve, hogy $T_1 = h$, azaz

$$\pi_{ij}(t|T_1 = h) = \mathbf{P}(X(t) = j \mid X(0) = i, T_1 = h).$$

Ekkor

$$\pi_{ij}(t|T_1 = h) = \begin{cases} \delta_{ij} & h \geq t \\ \sum_{k \in S, k \neq i} \frac{q_{ik}}{-q_{ii}} \pi_{kj}(t-h) & h < t, \end{cases}$$

ahol δ_{ij} a Kronecker delta ($\delta_{ij} = 1$ ha $i = j$ és $\delta_{ij} = 0$ ha $i \neq j$), és $\frac{q_{ik}}{-q_{ii}}$ annak a valószínűsége, hogy a Markov lánc az i állapotból a k állapotba lép. Általános sztochasztikus folyamatoknál ez a valószínűség függ az állapotátmenet idejétől ($T_1 = h$) is, de mint láttuk, Markov láncok esetén a következő állapot eloszlása független az állapotátmenet idejétől.

A fenti kifejezés két esetet foglal magába:

- Ha az általunk vizsgált t pillanat az első állapotátmenet előtt van, akkor a feltételes állapotátmenet értéke csak 0 vagy 1 lehet, attól függően, hogy a kiindulási állapot (i) és a vizsgált végállapot (j) megegyezik-e.
- Ha az általunk vizsgált t pillanat az első állapotátmenet után van, akkor T_1 -ben bekövetkezik egy állapotátmenet valamelyik $k (k \neq i)$ állapotba $\frac{q_{ik}}{-q_{ii}}$ valószínűséggel. Ezután a vizsgált állapotátmeneti valószínűség attól függ, hogy mekkora a hátralévő $t - h$ idő alatt a k állapotból a j állapotba lépés valószínűsége.

Az alkalmazott feltétel eloszlása ismert. Mivel T_1 az i állapotban tartózkodás ideje, így T_1 $-q_{ii}$ paraméterű exponenciális eloszlású. A feltétel eloszlása alapján meghatározhatjuk a (feltétel nélküli) állapotátmeneti valószínűség értékét:

$$\begin{aligned} \pi_{ij}(t) &= \int_{h=0}^{\infty} \pi_{ij}(t|T_1 = h) f_{T_1}(h) dh \\ &= \int_{h=t}^{\infty} \delta_{ij} f_{T_1}(h) dh + \int_{h=0}^t \sum_{k \in S, k \neq i} \frac{q_{ik}}{-q_{ii}} \pi_{kj}(t-h) f_{T_1}(h) dh \\ &= \delta_{ij} (1 - F_{T_1}(t)) + \int_{h=0}^t \sum_{k \in S, k \neq i} \frac{q_{ik}}{-q_{ii}} \pi_{kj}(t-h) f_{T_1}(h) dh \\ &= \delta_{ij} e^{q_{ii}t} + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} \int_{h=0}^t \pi_{kj}(t-h) e^{q_{ii}h} dh. \end{aligned}$$

Az így nyert integrálegyenletben, amit Volterra-féle integrálegyenletnek neveznek, az egyetlen ismeretlen az állapotátmeneti valószínűség függvény. A Volterra féle integrálegyenletek megoldására kidolgozott numerikus módszerek segítségével ebből a leírásból is meghatározható a Markov lánc tranzienis viselkedése.

Analízis módszerek kapcsolata

A Volterra integrálegyenletet tovább alakítjuk:

$$\begin{aligned}
\pi_{ij}(t) &= \delta_{ij} e^{q_{ii}t} + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} \int_{h=0}^t \pi_{kj}(t-h) e^{q_{ii}h} dh \\
&= \delta_{ij} e^{q_{ii}t} + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} \int_{h=0}^t \pi_{kj}(h) e^{q_{ii}(t-h)} dh \\
&= \delta_{ij} e^{q_{ii}t} + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} e^{q_{ii}t} \int_{h=0}^t \pi_{kj}(h) e^{-q_{ii}h} dh,
\end{aligned} \tag{2.5}$$

majd deriváljuk t szerint és azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\pi'_{ij}(t) &= \delta_{ij} q_{ii} e^{q_{ii}t} + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} \left(q_{ii} e^{q_{ii}t} \int_{h=0}^t \pi_{kj}(h) e^{-q_{ii}h} dh + e^{q_{ii}t} \pi_{kj}(t) e^{-q_{ii}t} \right) \\
&= \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} \pi_{kj}(t) + \underbrace{q_{ii} \left(\delta_{ij} e^{q_{ii}t} + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} e^{q_{ii}t} \int_{h=0}^t \pi_{kj}(h) e^{-q_{ii}h} dh \right)}_{\pi_{ij}(t)} \\
&= \sum_{k \in S} q_{ik} \pi_{kj}(t).
\end{aligned}$$

Transzformált tartománybeli leírás

Annak érdekében, hogy megmutassuk a Markov láncok tranzienisének differenciálegyenlettel és integrálegyenlettel adott leírásai kapcsolatát, Laplace transzformáljuk a fenti kifejezést. A Laplace transzformáció egyszerűen elvegezhető, mivel a kifejezés egyetlen összetett tagja, az utolsó tag, egy konvolúciós integrált tartalmaz.

$$\pi_{ij}^*(s) = \delta_{ij} \frac{1}{s - q_{ii}} + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} \pi_{kj}^*(s) \frac{1}{s - q_{ii}}$$

A nevezővel szorozva, majd kihasználva, hogy $-q_{ii} = \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik}$,

$$s \pi_{ij}^*(s) = \delta_{ij} + \sum_{k \in S} q_{ik} \pi_{kj}^*(s),$$

ami mátrix alakban

$$s \Pi^*(s) = \mathbf{I} + \mathbf{Q} \Pi^*(s),$$

így

$$\Pi^*(s) = [s\mathbf{I} - \mathbf{Q}]^{-1},$$

ami megegyezik a differenciál egyenletes alakból nyert Laplace transzformálttal.

Egyensúlyi viselkedés

Legyen az $X_i \in S, i = 0, 1, \dots$ valószínűségi változó az $X(t)$ Markov lánc i -edik állapota, vagyis az az állapot, amelyikben $X(t)$ a (T_i, T_{i+1}) intervallumban tartózkodik. Az X_0, X_1, \dots valószínűségi változó sorozat ($X(t)$ Markov tulajdonsága alapján) „diszkrét idejű” Markov láncot alkot, melynek állapotátmeneti valószínűségei:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} \frac{q_{ij}}{-q_{ii}} & i \neq j \\ 0 & i = j. \end{cases}$$

Az X_0, X_1, \dots (diszkrét idejű) Markov láncot *beágyazott Markov láncnak* nevezik. A beágyazott Markov lánc \hat{P} egyensúlyi eloszlása (ahol $\hat{P} = \hat{P}\Pi, \sum_i \hat{P}_i = 1$) megadja, hogy az egyes állapotokba milyen gyakran lép a folyamat.

Az egész folyamat egyensúlyi viselkedését azonban két tényező együttes hatása határozza meg, nevezetesen az egyes állapotokba lépés gyakorisága, valamint az egyes állapotokban eltöltött idő. A felújításmélet egyik leggyakrabban alkalmazott összefüggése alapján

$$P_i = \frac{\hat{P}_i \hat{\tau}_i}{\sum_j \hat{P}_j \hat{\tau}_j},$$

ahol $\hat{\tau}_j$ a j állapotban töltött idő várható értéke, ami Markov láncok esetén $-1/q_{jj}$.

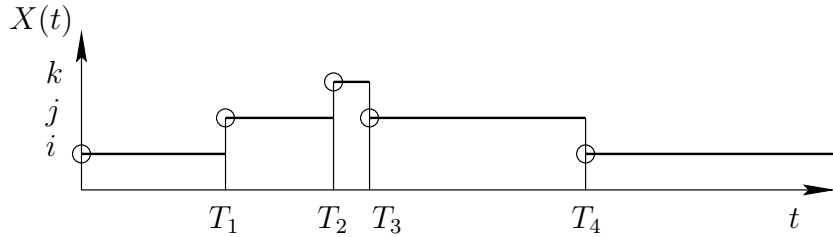
Markov láncok szimulációja

Két féle szimulációs megközelítés létezik.

- Egy tetszőleges i állapotban először a tartási idő eloszlása ($-q_{ii}$ paraméterű exponenciális) alapján kisorsoljuk az állapot tartási időt (τ), majd Π_{ij} (diszkrét eloszlás) alapján, a következő állapotot. Látható, hogy a két sorsolás független egymástól.
- A másik szimulációs eljárás során minden i -ből induló átmenethez kisorsoljuk az átmenethez tartozó átlépés idejét τ_{ij} (q_{ij} paraméterű exponenciális eloszlású), és ezek közül a kisorsolt átlépési idők közül a legelső következik be.

2.3. Szemi-Markov folyamat

2.13. Definíció. 2.15 Az $X(t)$ diszkrét állapotú folytonos idejű sztochasztikus folyamatot szemi-Markov folyamatnak nevezzük, ha időben homogén és minden állapotváltási időpillanatban teljesíti a Markov tulajdonságot (2.1 ábra).



2.1. ábra. Szemi-Markov folyamat, a körrel jelölt időpontokban teljesül a Markov tulajdonság

A szemi-Markov folyamatok nevüket onnan kapták, hogy e folyamatok esetén a Markov tulajdonság csak az állapotátmenetek pillanatában teljesül, és az állapotátmenetek közti időben a folyamat viselkedése függ egy múlthoz kötődő mennyiségtől, például az adott állapotban tartózkodás idejétől.

2.14. Következmény. Az állapotokban tartózkodás ideje tetszőleges eloszlású, és a következő állapot eloszlása összefügg az állapotban töltött idővel.

A Markov folyamatok (Markov tulajdonságból közvetlenül adódó) tulajdonsága, hogy az egyes állapotokban tartózkodás ideje exponenciális eloszlású, és egy állapotban tartózkodás ideje, valamint a következő állapot függetlenek egymástól. Például az első állapotátmenetre vonatkozóan T_1 exponenciális eloszlású, és:

$$Pr(X_1 = j, T_1 = c | X_0 = i) = Pr(X_1 = j | X_0 = i) Pr(T_1 = c | X_0 = i).$$

Ez azonban (speciális esetektől eltekintve) nem teljesül szemi-Markov folyamatokra. A folyamat definíciójának legfontosabb következménye, hogy a szemi-Markov folyamatok egyes állapotokban eltöltött ideje lehet nem exponenciális eloszlású, és az állapotokban töltött idő és a következő állapot eloszlása nem független egymástól. Függő valószínűségi változók leírása az együttes eloszlás megadásával történik. A szemi-Markov folyamatok leírása az adott állapot után következő állapot és az adott állapotban eltöltött idő együttes eloszlásának megadásával történik:

$$Q_{ij}(t) = Pr \{ Z(T_{i+1}) = j, \tau_{i+1} \leq t | Z(T_i) = i \}.$$

Ha a folyamat időben homogén (a folyamat működési szabálya állandó), akkor $\forall T_i$ -re

$$Q_{ij}(t) = Pr \{Z(T_{i+1}) = j, \tau_{i+1} \leq t \mid Z(T_i) = i\} = Pr \{Z(T_1) = j, T_1 \leq t \mid Z(0) = i\}.$$

A szemi-Markov folyamatok vizsgálatát tipikusan a Markov felújítás elmélet, azaz az állapotátmenetek pillanatában teljesülő Markov tulajdonság segítségével végzik a $Q(t) = \{Q_{ij}(t)\}$ ú.n. magmátrix vagy kernel mátrix alapján.

2.3.1. Analízis az állapot átlépések alapján

Tekintsük az $X(t) \in S$ folytonos idejű szemi-Markov folyamatot. Jelölje T_1, T_2, T_3, \dots az állapotátmenetek időpontjait (definíció szerint $T_0 = 0$) és $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$ az egymás utáni állapotokban eltöltött időt ($\tau_i = T_i - T_{i-1}$). Vizsgáljuk a $\pi_{ij}(t)$ állapotátmeneti valószínűséget, feltételezve, hogy $T_1 = h$, azaz

$$\pi_{ij}(t \mid T_1 = h) = \mathbf{P}(X(t) = j \mid X(0) = i, T_1 = h).$$

Ekkor

$$\pi_{ij}(t \mid T_1 = h) = \begin{cases} \delta_{ij} & h \geq t \\ \sum_{k \in S} \mathbf{P}(X(T_1) = k \mid X(0) = i, T_1 = h) \pi_{ik}(t - h) & h < t, \end{cases}$$

ahol $\mathbf{P}(X(T_1) = j \mid X(0) = i, T_1 = h)$ annak a valószínűsége, hogy a folyamat az i állapotból a $T_1 = h$ pillanatban a k állapotba lép. A Markov láncokkal ellentétben ez a valószínűség függ az állapotátmenet idejétől:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X(T_1) = j \mid X(0) = i, T_1 = h) &= \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{Pr \{X(T_1) = j, h < T_1 \leq h + \Delta \mid X(0) = i\}}{Pr \{h < T_1 \leq h + \Delta \mid X(0) = i\}} &= \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{Q_{ij}(h + \Delta) - Q_{ij}(h)}{Q_i(h + \Delta) - Q_i(h)} = \frac{dQ_{ij}(h)}{dQ_i(h)}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

ahol, $Q_i(h)$ az i állapotban töltött idő eloszlását jelöli:

$$Q_i(t) = Pr \{T_1 \leq t \mid Z(0) = i\} = \sum_j Pr \{Z(T_1) = j, T_1 \leq t \mid Z(0) = i\} = \sum_j Q_{ij}(t)$$

Az általunk vizsgált szemi-Markov folyamatoknál azt feltételezzük, hogy az állapotváltozás után új állapotba kerül a folyamat, azaz nincsenek virtuális állapotátmenetek. Ennek feltétele, hogy $Q_{ii}(t) \equiv 0, \forall i \in S$. A Markov láncok generátormátrixának főátló elemei tehát teljesen más jelentésűek, mint a szemi-Markov folyamatok kernelének főátló elemei. Ezért nem kell kizárni a kezdőállapotot a szemi-Markov folyamatok vizsgálatánál az állapotokra vonatkozó összegzésből.

A fenti kifejezés két esetet foglal magába:

- Ha az általunk vizsgált t pillanat az első állapotátmenet előtt van, akkor a feltételes állapotátmenet értéke csak 0 vagy 1 lehet, attól függően, hogy a kiindulási állapot (i) és a vizsgált végállapot (j) megegyezik-e.
- Ha az általunk vizsgált t pillanat az első állapotátmenet után van, akkor T_1 -ben bekövetkezik egy állapotátmenet valamelyik $k (k \neq i)$ állapotba $\frac{dQ_{ij}(h)}{dQ_i(h)}$ valószínűséggel. Eztán a vizsgált állapotátmeneti valószínűség attól függ, hogy mekkora a hátralévő $t - h$ idő alatt a k állapotból a j állapotba lépés valószínűsége.

Az alkalmazott feltétel, az i állapotban tartózkodás (T_1) idejének eloszlása ismert: $Q_i(h)$. A feltétel eloszlása alapján meghatározhatjuk a keresett (feltétel nélküli) állapotátmeneti valószínűség értékét:

$$\begin{aligned}\pi_{ij}(t) &= \int_{h=0}^{\infty} \pi_{ij}(t|T_1 = h) dF_{T_1}(h) \\ &= \int_{h=t}^{\infty} \delta_{ij} dQ_i(t) + \int_{h=0}^t \sum_{k \in S} \frac{dQ_{ik}(h)}{dQ_i(h)} \pi_{kj}(t-h) dQ_i(h) \\ &= \delta_{ij} (1 - Q_i(t)) + \int_{h=0}^t \sum_{k \in S} \pi_{kj}(t-h) dQ_{ik}(h).\end{aligned}$$

Az állapotátmenetek pillanatának vizsgálatával tehát szemi-Markov folyamatok esetén is Volterra-féle integrálegyenletet kapunk, amiből megfelelő numerikus módszerek segítségével kiszámítható a folyamat tranziens viselkedése.

Transzformált tartománybeli leírás

A Volterra-egyenlet zárt alakú megoldása érdekében Laplace transzformáljuk a fenti kifejezést. A Laplace transzformáció egyszerűen elvegezhető, mivel a kifejezés egyetlen összetett tagja, az utolsó tag, $Q_{ik}(t)$ deriváltjának ($q_{ik}(t)$) bevezetése után egy konvolúciós integrált tartalmaz.

$$\pi_{ij}^*(s) = \delta_{ij} (1 - Q_i^*(s)) + \sum_{k \in S} q_{ik}^*(s) \pi_{kj}^*(s).$$

Bevezetve az $1 - Q_i^*(s)$ elemekből képzett $D^*(s) = \text{diag}\langle 1 - Q_i^*(s) \rangle$ diagonál mátrixot, az állapotátmeneti valószínűség felírható mátrix alakban:

$$\Pi^*(s) = D^*(s) + q^*(s)\Pi^*(s),$$

amiből

$$\Pi^*(s) = [\mathbf{I} - q^*(s)]^{-1} D^*(s).$$

Egyensúlyi viselkedés

A szemi-Markov folyamatok egyensúlyi viselkedése a fentiekhez hasonlóan számítható az állapotátmeneti pillanatokba beágyazott Markov lánc segítségével. A T_i állapotváltási időpontokba beágyazott Markov lánc átlépésmátrixa a

$$\Pi_{ij} = Pr \{Z(T_1) = j \mid Z(0) = i\} = \lim_{t \rightarrow \infty} Pr \{Z(T_1) = j, T_1 \leq t \mid Z(0) = i\} = \lim_{t \rightarrow \infty} Q_{ij}(t)$$

összefüggés alapján számítható.

A beágyazott Markov lánc $\hat{P} = \hat{P}\Pi, \sum_i \hat{P}_i = 1$ egyensúlyi eloszlása, és az egész folyamatra vonatkozóan

$$P_i = \frac{\hat{P}_i \hat{\tau}_i}{\sum_j \hat{P}_j \hat{\tau}_j}, \quad (2.7)$$

ahol $\hat{\tau}_i$, az i állapotban töltött idő várható értéke, $Q_i(t)$ alapján, $\hat{\tau}_i = \int_0^\infty 1 - Q_i(t) dt$ alakban számítható.

Szemi-Markov folyamatok szimulációja

A $Q_{ij}(t)$ kernel (a kezdeti eloszlással együtt) teljes mértékben megadja a folyamat viselkedését (mint a folytonos idejű Markov láncokat a generátor mátrix), így a szemi-Markov folyamatok diszkrét esemény szimulációja is elvégezhető $Q_{ij}(t)$ alapján.

Kétféle szimulációs megközelítés létezik:

- egy állapotban először $Q_i(t)$ alapján kisorsoljuk a τ állapot tartási időt, majd a következő állapotot. Mivel a következő állapot és az állapot tartási idő összefüggő valószínűségi változók, így a következő állapotot a fent meghatározott $Pr \{X(T_1) = j \mid X(0) = i, T_1 = \tau\}$ valószínűségeloszlásnak megfelelően kell sorsolni.
- A másik szimulációs eljárás során a következő állapotot sorsoljuk először $\Pi_{ij} = Pr \{Z(T_1) = j \mid Z(0) = i\}$ alapján, majd a következő állapot ismeretében az állapot tartási időt a

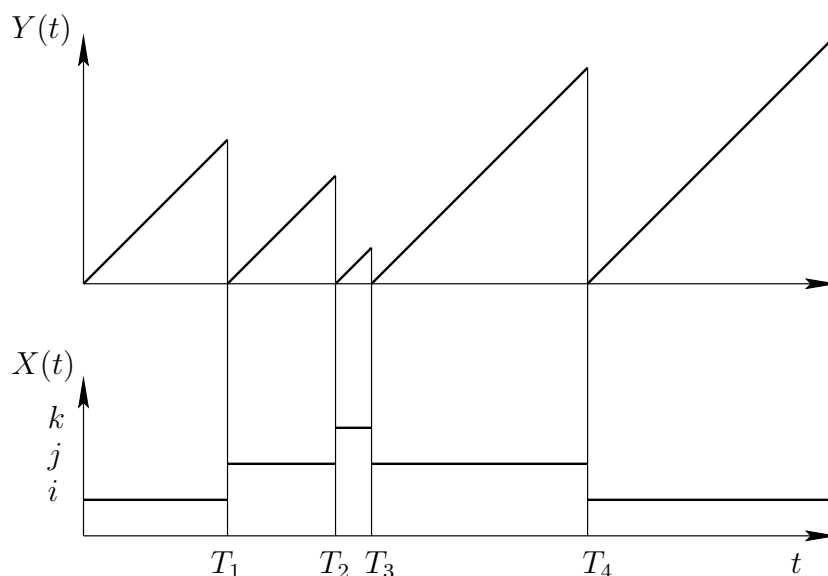
$$Pr \{T_1 \leq t \mid Z(0) = i, Z(T_1) = j, \} = \frac{Q_{ij}(t)}{\Pi_{ij}} \quad (2.8)$$

feltételes tartási idő eloszlás alapján.

2.3.2. Tranziens viselkedés vizsgálata segédváltozók módszerével

A Szemi-Markov folyamatok az állapotátmenetek közti intervallumban nem teljesítik a Markov tulajdonságot, mivel egy tetszőleges időponttól kezdődően az adott állapotban eltöltött idő eloszlása függ attól, hogy mennyi ideje tartózkodik a folyamat

az adott állapotban. Egy tetszőleges időpillanatban a sztochasztikus folyamat jövője tehát két mennyiségtől a folyamat állapotától, és az adott állapotban eltöltött időtől függ. Abban az esetben, ha definiálunk egy új sztochasztikus folyamatot ebből ennek a két mennyiségnek a segítségével, akkor olyan folyamatot nyerünk, amelynek jövője csak a pillanatnyi állapotától függ. Tekintsük tehát az $\{X(t), Y(t)\}$ páros által alkotott ("vektor") folyamatot, ahol $X(t)$ a Szemi-Markov folyamat állapota, és $Y(t)$ az utolsó állapotváltás óta eltelt idő $Y(t) = t - \max(T_i \leq t)$. Ezt az eljárást, hogy az $X(t)$ folyamat vizsgálatára bevezetünk egy $\{X(t), Y(t)\}$ páros folyamatot, amelynek folytonos változója az $X(t)$ folyamat "múlttól való függését" írja le segédváltozók módszerének nevezik (supplementary variable approach) [3]. Gyakorlatilag egy segédváltozóval, $Y(t)$, kiegészítve vizsgáljuk az $X(t)$ folyamatot (2.2 ábra).



2.2. ábra. Szemi-Markov folyamat vizsgálata segédváltozóval

$Y(t)$ alapján minden pillanatban meghatározható, hogy a Szemi-Markov folyamat még mennyi időt tölt el az $X(t)$ állapotban. Ezt nevezzük hátralévő állapot tartási időnek. Ha a folyamat t pillanatban τ ideje tartózkodik az i állapotban ($X(t) = i$, $Y(t) = \tau$), amelynek tartási idő eloszlása $Q_i(t)$ eloszlásfüggvénnyel adott, akkor az i állapotban hátralévő idő (γ) eloszlása:

$$\Pr(\gamma \leq t) = \Pr(\gamma_t \leq t + \tau \mid \gamma_t > \tau) = \frac{Q_i(t + \tau) - Q_i(\tau)}{1 - Q_i(\tau)}$$

ahol γ_t az i állapotban eltöltött összes időt jelöli.

Az $\{X(t), Y(t)\}$ folyamat jellemzésére e két véletlen mennyiség együttes eloszlását kell meghatározni:

$$h_i(t, x) = \frac{\Pr(X(t) = i, x \leq Y(t) < x + \Delta)}{\Delta}$$

$h_i(t, x)$ vizsgálható a Markov láncoknál már alkalmazott rövid idejű viselkedés alapján:

$$h_i(t + \Delta, x) =$$

Pr(nincs állapot átlépés $(t, t + \Delta)$ intervallumban) $h_i(t + \Delta, x \mid$ nincs átlépés) +

Pr(állapot átlépés $(t, t + \Delta)$ intervallumban) $h_i(t + \Delta, x \mid$ átlépés)

Az átlépés valószínűsége meghatározható hátralévő idő eloszlás alapján:

Pr(állapot átlépés $(t, t + \Delta)$ intervallumban) =

$$\Pr(\text{hátralévő állapot tartási idő} \leq \Delta) = \frac{Q_i(x + \Delta) - Q_i(x)}{1 - Q_i(x)},$$

ahonnan

$$\Pr(\text{nincs állapot átlépés } (t, t + \Delta) \text{ intervallumban}) = \frac{1 - Q_i(x + \Delta)}{1 - Q_i(x)}.$$

Másrészt annak valószínűsége, hogy az átlépést követő pillanatban $Y(t + \Delta) = x$ nulla minden $x > 0$ -ra, megfelelően kis Δ intervallumot választva, azaz:

$$h_i(t + \Delta, x \mid \text{átlépés}) = 0 \quad \text{ha } x > 0.$$

Így

$$h_i(t + \Delta, x) =$$

Pr(nincs állapot átlépés $(t, t + \Delta)$ intervallumban) $h_i(t + \Delta, x \mid$ nincs átlépés) =

$$\frac{1 - Q_i(x + \Delta)}{1 - Q_i(x)} h_i(t, x - \Delta)$$

Bevezetve az valószínűség számításban általánosan alkalmazott esemény bekövetkezési intenzitás fogalmát a $Q_i(t)$ eloszlású α_i valószínűségi változóra

$$\lambda_i(t) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Pr(\alpha_i \leq t + \Delta \mid \alpha_i > t)}{\Delta} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{Q_i(t + \Delta) - Q_i(t)}{\Delta (1 - Q_i(t))} = \frac{Q_i'(t)}{1 - Q_i(t)},$$

az állapotátlépés valószínűsége felírható az alábbi formában

$$\Pr(\text{állapotváltás } (t, t + \Delta) \text{ intervallumban}) = \frac{Q_i(x + \Delta) - Q_i(x)}{1 - Q_i(x)} = \lambda_i(x)\Delta + \sigma(\Delta) ,$$

amiből

$$\Pr(\text{nincs állapot átlépés } (t, t + \Delta) \text{ intervallumban}) = 1 - \lambda_i(x)\Delta + \sigma(\Delta) .$$

Mindebből $h_i(t, x)$ az alábbi formára hozható:

$$h_i(t + \Delta, x) = (1 - \lambda_i(x)\Delta + \sigma(\Delta)) h_i(t, x - \Delta)$$

A kapott kifejezés alapján lépésenként végezzük el a $h_i(t, x)$ mennyiséget leíró parciális differenciálegyenlet felírását:

$$h_i(t + \Delta, x) - h_i(t, x - \Delta) = (-\lambda_i(x)\Delta + \sigma(\Delta)) h_i(t, x - \Delta)$$

$$h_i(t + \Delta, x) - h_i(t, x) + h_i(t, x) - h_i(t, x - \Delta) = (-\lambda_i(x)\Delta + \sigma(\Delta)) h_i(t, x - \Delta)$$

$$\frac{h_i(t + \Delta, x) - h_i(t, x)}{\Delta} + \frac{h_i(t, x) - h_i(t, x - \Delta)}{\Delta} = (-\lambda_i(x) + \frac{\sigma(\Delta)}{\Delta}) h_i(t, x - \Delta)$$

végül elvégezzük a $\Delta \rightarrow 0$ határátmenetet, amiből:

$$\frac{\partial h_i(t, x)}{\partial t} + \frac{\partial h_i(t, x)}{\partial x} = -\lambda_i(x) h_i(t, x) \quad (2.9)$$

Ez a parciális differenciál egyenlet a $h_i(t, x)$ mennyiséget az $x > 0$ tartományban írja le. Az $x = 0$ esetet külön kell meghatározni. Tekintsük először a következő valószínűséget:

$$\Pr(X(t + \Delta) = i, Y(t) < \Delta) = \sum_{k \in S, k \neq i} \int_{x=0}^{\infty} \Pr(X(t) = k, Y(t) = x, \text{átlépés } (t, t + \Delta)\text{-ben az } i \text{ állapotba}) dx$$

Annak valószínűsége, hogy a folyamat a $(t, t + \Delta)$ -ben átlép a k állapotból az i állapotba

$$\Pr(\text{átlépés } (t, t + \Delta)\text{-ben } k\text{-ból } i\text{-be}) =$$

$$\Pr(\text{átlépés } (t, t + \Delta)\text{-ben}) \Pr(\text{átlépés } k\text{-ból } i\text{-be} \mid \text{átlépés } (t, t + \Delta)\text{-ben}) =$$

$$\frac{Q_k(x + \Delta) - Q_k(x)}{1 - Q_k(x)} \frac{Q_{ki}(x + \Delta) - Q_{ki}(x)}{Q_k(x + \Delta) - Q_k(x)} ,$$

ahol a második tényező a (2.6) egyenletből már ismert. Bevezetve az k -ból i -be történő átlépési intenzitást:

$$\lambda_{ki}(x) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\Pr(\text{átlépés } (t, t + \Delta)\text{-ben } k\text{-ból } i\text{-be})}{\Delta} =$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{Q_{ki}(x + \Delta) - Q_{ki}(x)}{\Delta(1 - Q_k(x))} = \frac{Q'_{ki}(x)}{1 - Q_k(x)}$$

az átlépési valószínűség a következő alakra hozható:

$$\Pr(\text{átlépés } (t, t + \Delta)\text{-ben } k\text{-ból } i\text{-be}) = \lambda_{ki}(x)\Delta + \sigma(\Delta)$$

Ennek felhasználásával

$$\Pr(X(t + \Delta) = i, Y(t) < \Delta) = h_i(t + \Delta, 0)\Delta =$$

$$\sum_{k \in S, k \neq i} \int_{x=0}^{\infty} (\lambda_{ki}(x)\Delta + \sigma(\Delta)) h_k(t, x) dx ,$$

amiből Δ -val oszva és a $\Delta \rightarrow 0$ határátmenetet képezve

$$h_i(t, 0) = \sum_{k \in S, k \neq i} \int_{x=0}^{\infty} \lambda_{ki}(x) h_k(t, x) dx . \quad (2.10)$$

A segédváltozók módszere segítségével tehát az $\{X(t), Y(t)\}$ folyamat $h_i(t, x)$ leíróját lehet meghatározni az (2.9) parciális differenciál egyenlet alapján a (2.10) peremfeltétel mellett alkalmas numerikus módszer segítségével, amennyiben a $h_i(0, x)$ kezdeti feltétel ismert minden $i \in S$ állapotra.

Egyensúlyi viselkedés

Amennyiben a $\lim_{t \rightarrow \infty} h_i(t, x) = h_i(x)$ határérték létezik minden $i \in S$ állapotra, akkor (2.9) és (2.9) egyenletekből a $t \rightarrow \infty$ határértéket képezve azt kapjuk, hogy

$$\frac{dh_i(x)}{dx} = -\lambda_i(x) h_i(x) \quad (2.11)$$

$$h_i(0) = \sum_{k \in S, k \neq i} \int_{x=0}^{\infty} \lambda_{ki}(x) h_k(x) dx . \quad (2.12)$$

(2.11) közönséges differenciál egyenlet megoldása

$$h_i(x) = h_i(0) e^{\int_{u=0}^x -\lambda_i(u) du}$$

ahol az ismeretlen $h_i(0)$ mennyiséget a (2.12) egyenletbe helyettesítve határozzuk meg:

$$h_i(0) = \sum_{k \in S, k \neq i} \int_{x=0}^{\infty} \lambda_{ki}(x) h_k(0) e^{\int_{u=0}^x -\lambda_k(u) du} dx = \\ \sum_{k \in S, k \neq i} h_k(0) \int_{x=0}^{\infty} \lambda_{ki}(x) e^{\int_{u=0}^x -\lambda_k(u) du} dx$$

ahol

$$\int_{x=0}^{\infty} \lambda_{ki}(x) e^{\int_{u=0}^x -\lambda_k(u) du} dx = \Pr(k \text{ után } i\text{-be lép a folyamat}) = \Pi_{ki}$$

azaz a

$$h_i(0) = \sum_{k \in S, k \neq i} h_k(0) \Pi_{ki} \quad \forall i \in S$$

egyenletrendszer (az állapotvalószínűségek összegére vonatkozó)

$$\sum_{i \in S} \int_{x=0}^{\infty} h_i(x) dx = 1$$

feltétel melletti megoldását keressük. Mivel

$$\sum_{i \in S} \int_{x=0}^{\infty} h_i(x) dx = \sum_{i \in S} h_i(0) \int_{x=0}^{\infty} e^{\int_{u=0}^x -\lambda_i(u) du} dx = \sum_{i \in S} h_i(0) \hat{\tau}_i = 1 ,$$

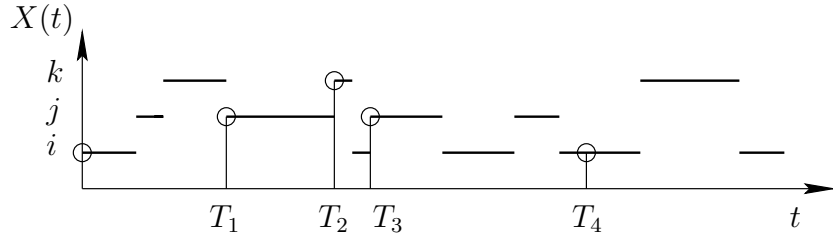
így a (2.7) egyenlettel összevetve látható, hogy a keresett megoldás

$$h_i(0) = \frac{\hat{P}_i}{\sum_j \hat{P}_j \hat{\tau}_j} .$$

2.4. Markov regeneratív folyamat

2.15. Definíció. Az $X(t)$ diszkrét állapotú folytonos idejű időben homogén sztochasztikus folyamatot Markov regeneratív folyamatnak nevezzük, ha létezik egy T_0, T_1, T_2, \dots ($T_0 \doteq 0$) véletlen időpontosorozat, amely időpontokban a folyamat teljesíti a Markov tulajdonságot (2.3 ábra) [1, 6].

Markov regeneratív folyamatoknál tehát nem elvárás, hogy minden állapotátmenet pillanatában teljesüljön a Markov tulajdonság, csak az, hogy legyen egy véletlen időpontosorozat, amelyben teljesül. A Markov regeneratív folyamatok memória mentes időpontjai közti viselkedésére nincs semmilyen további kikötés, így ezek a folyamatok az egyes (T_i, T_{i+1}) intervallumokban tetszőlegesen bonyolultak lehetnek. A Markov



2.3. ábra. Markov regeneratív folyamat, a körrel jelölt időpontokban teljesül a Markov tulajdonság

tulajdonságból adódó megkötés csak annyi, hogy ha a folyamat a T_i pillanatban az $x \in S$ állapotban tartózkodik ($X(T_i) = x$), és valamennyi idő múlva a T_j pillanatban ismét az $x \in S$ állapotban tartózkodik ($X(T_j) = x$), akkor az $X(t - T_i)$ folyamat és az $X(t - T_j)$ folyamat viselkedése sztochasztikus értelemben meg kell egyezzen.

Markov regeneratív folyamatok analízisének is a Markov tulajdonságot használjuk ki. A folyamat vizsgálatát visszavezetjük a Markov tulajdonságú időpontokban tapasztalható viselkedésre.

2.16. Definíció. A véletlen változók $\{Y_n, T_n; n \geq 0\}$ sorozatát időben homogén Markov felújítási sorozatnak nevezzük, ha

$$\begin{aligned} \Pr \{Y_{n+1} = y, T_{n+1} - T_n \leq t \mid Y_0, \dots, Y_n, T_0, \dots, T_n\} \\ &= \Pr \{Y_{n+1} = y, T_{n+1} - T_n \leq t \mid Y_n\} \\ &= \Pr \{Y_1 = y, T_1 - T_0 \leq t \mid y_0\} \end{aligned}$$

minden $n \geq 0$, $y \in S$ és $t \geq 0$ esetén.

A Markov felújítási sorozatok definíciójából látható, hogy az Y_0, Y_1, \dots sorozat egy diszkrét idejű Markov lánc. Valamint, ha $X(t)$ Markov regeneratív folyamat, amely a T_0, T_1, T_2, \dots időpontokban teljesíti a Markov tulajdonságot, akkor az $\{X(T_i), T_i\}$ sorozat Markov felújítási sorozatot alkot.

A Markov felújítási sorozatok leírása, a Szemi-Markov folyamatokhoz hasonlóan, a következő felújítási pillanat, és a következő felújítási állapot együttes eloszlásának megadásával történik.

$$K_{ij}(t) = \Pr \{X_1 = j, T_1 - T_0 \leq t \mid X_0 = i\} , \quad i, j \in S$$

A $K(t) = \{K_{ij}(t)\}$ mátrixot a Markov felújítási sorozat kernel mátrixának nevezik.

Az $X(t)$ Markov regeneratív folyamat T_0, T_1, T_2, \dots felújítási időpillanataiba ágyazott $\{X(T_i), T_i\}$ Markov felújítási sorozat kernel mátrixát, ami leírja a Markov regeneratív folyamat felújítási pillanatainak és állapotainak előfordulását, a Markov regeneratív folyamat globális kernelének nevezik.

Míg a Markov regeneratív folyamat globális kernele sztochasztikus értelemben teljesen leírja a folyamat felújítási pillanatainak és állapotainak előfordulását, addig a Markov regeneratív folyamatok felújítási időpontok közti intervallumait az általánosság megszorítása nélkül már sokkal nehezebb leírni, mivel azok tetszőlegesen összetett folyamatok lehetnek. Gyakorlatban egy olyan leírást alkalmaznak, amely sztochasztikus értelemben nem definiálja teljesen a folyamatot, azonban lehetővé teszi a tranziens viselkedés meghatározását. A felújítási időpontok közti folyamatokat az u.n. lokális kernellel $E(t) = \{E_{ij}(t)\}$ jellemzik, ahol:

$$E_{ij}(t) = Pr \{X(t) = j, T_1 > t, | Z(0) = i\} \quad .$$

$E_{ij}(t)$ annak valószínűsége, hogy az i állapotból induló regeneratív időszak t -nél tovább tart és t -ben a j állapotban tartozkodik a folyamat.

2.4.1. Tranziens viselkedés felújítási pillanatok vizsgálata alapján

Jelölje a tetszőleges időpillanatra vonatkozó állapotátmeneti valószínűséget mátrixot $\Pi(t)$, aminek elemei

$$\Pi_{ij}(t) = Pr \{X(t) = j | X(0) = i\} \quad .$$

Feltéve, hogy az első állapotátmenet h pillanatban következik be a feltételes állapotátmeneti valószínűség a következő:

$$\Pi_{ij}(t | T_1 = h) = \begin{cases} Pr \{X(t) = j | T_1 = h, X(0) = i\} & h > t \\ \sum_{k \in S} \mathbf{P}(X(T_1) = k | X(0) = i, T_1 = h) \cdot \Pi_{kj}(t - h) & h \leq t \end{cases} \quad (2.13)$$

(2.13) egyenletben az előzőekhez hasonló két egymást kizáró esetet kell figyelembe venni, ahhoz, hogy egy vizsgált t pillanatig meghatározzuk az állapotátmenet valószínűségét. A feltételt feloldva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \Pi_{ij}(t) &= \int_{h=t}^{\infty} Pr \{X(t) = j | T_1 = h, X(0) = i\} dK_i(h) \\ &+ \int_{h=0}^t \sum_{k \in S} \frac{dK_{ik}(t)}{dK_i(t)} \Pi_{kj}(t - h) dK_i(h) \end{aligned} \quad (2.14)$$

Tekintsük a jobb oldal első tagját:

$$\begin{aligned}
& \int_{h=t}^{\infty} Pr \{X(t) = j \mid T_1 = h, X(0) = i\} dK_i(h) = \\
& \int_{h=t}^{\infty} \lim_{\Delta \rightarrow 0} Pr \{X(t) = j \mid h \leq T_1 < h + \Delta, X(0) = i\} dK_i(h) = \\
& \int_{h=t}^{\infty} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{Pr \{X(t) = j, h \leq T_1 < h + \Delta \mid X(0) = i\}}{Pr \{h \leq T_1 < h + \Delta, \mid X(0) = i\}} dK_i(h) = \\
& \int_{h=t}^{\infty} \frac{d_h Pr \{X(t) = j, T_1 < h \mid X(0) = i\}}{dK_i(h)} dK_i(h) = \\
& Pr \{X(t) = j, t < T_1 \mid X(0) = i\}
\end{aligned}$$

amiből

$$\Pi_{ij}(t) = E_{ij}(t) + \sum_{k \in S} \int_{h=0}^t \Pi_{kj}(t-h) dK_{ik}(h) \quad (2.15)$$

Feltételezve, hogy $\mathbf{K}(t)$ deriválható és $d\mathbf{K}(t)/dt = \mathbf{k}(t)$

$$\Pi_{ij}(t) = E_{ij}(t) + \sum_{k \in S} \int_{h=0}^t \Pi_{kj}(t-h) k_{ik}(h) dh \quad (2.16)$$

A Markov láncok és Szemi-Markov folyamatok tranziens viselkedéséhez hasonlóan a Markov regeneratív folyamatok tranziens viselkedése is a kapott Volterra integrálegyenlet numerikus megoldásával nyerhető.

Transzformált tartománybeli leírás

(2.16) Laplace transformáltja a következő:

$$\Pi_{ij}^*(s) = E_{ij}^*(s) + \sum_{k \in \Omega} k_{ik}^*(s) \Pi_{kj}^*(s) \quad (2.17)$$

ami mátrix alakban:

$$\Pi^*(s) = E^*(s) + k^*(s) \Pi^*(s) \quad (2.18)$$

Aminek megoldása:

$$\Pi^*(s) = [\mathbf{I} - k^*(s)]^{-1} E^*(s) \quad (2.19)$$

Egyensúlyi viselkedés

A Markov regeneratív folyamatok egyensúlyi viselkedése a felújítási pillanatok közti tetszőleges bonyolultság ellenére a fentiekhez hasonlóan számítható a felújítási

pillanatok közti időszakok és azok előfordulási gyakorisága alapján. A T_i felújítási időpontokba beágyazott Markov lánc átlépés mátrixa a következő:

$$\Pi_{ij} = Pr \{Z(T_1) = j \mid Z(0) = i\} = \lim_{t \rightarrow \infty} Pr \{Z(T_1) = j, T_1 \leq t \mid Z(0) = i\} = \lim_{t \rightarrow \infty} K_{ij}(t).$$

Amiből a beágyazott Markov lánc egyensúlyi eloszlása $\hat{P} = \hat{P}\Pi, \sum_i \hat{P}_i = 1$ alapján számítható. Ezután még azt kell meghatározni, hogy az egyes felújítási intervallumok várhatóan mennyi ideig tartanak és a felújítási intervallumok alatt mennyi időt tölt a folyamat a különböző állapotokban. Szerencsére a lokális kernel ($E(t)$) alapján ez meghatározható. Például az i állapotból induló felújítási intervallum alatt a j állapotban töltött idő várható értéke

$$\begin{aligned} \tau_{ij} &= \mathbf{E} \left(\int_{t=0}^{\infty} I\{X(t) = j, T_1 > t \mid X(0) = i\} dt \right) \\ &= \int_{t=0}^{\infty} Pr\{X(t) = j, T_1 > t \mid X(0) = i\} dt \\ &= \int_{t=0}^{\infty} E_{ij}(t) dt \end{aligned}$$

ahol $I\{\cdot\}$ a \cdot esemény indikátora (értéke 1, ha az esemény teljesül, 0, ha nem teljesül). Az i állapotból induló felújítási intervallum hosszának várható értéke

$$\tau_i = \sum_{j \in S} \tau_{ij}$$

Végül a folyamat egyensúlyi eloszlása

$$P_i = \frac{\sum_{j \in S} \hat{P}_j \tau_{ji}}{\sum_{j \in S} \hat{P}_j \tau_j}.$$

2.5. További speciális sztochasztikus folyamatok

2.5.1. Felújítási folyamat

Legyen T_1, T_2, \dots valamely esemény egymást követő bekövetkezéseinek időpontja, s jelölje $Z_i = T_i - T_{i-1}$, $T_0 = 0$, $i > 0$ az egymást követő események közötti időintervallum hosszát.

2.17. Definíció. A T_i , $i \geq 0$ folyamatot felújítási (renewal) folyamatnak nevezzük, ha a Z_i , $i > 0$ véletlen változók függetlenek és azonos eloszlásúak. Ekkor a Z_i intervallumokat felújítási intervallumoknak nevezzük.

A felújítási folyamatok tulajdonságai:

1. $\forall T_i$ időpontban teljesül a Markov tulajdonság
2. A felújítási intervallumok hossza tetszőleges eloszlású.

A felújítási folyamatok tekinthetők speciális, "egy állapotú", Szemi-Markov folyamatoknak.

2.5.2. Poisson folyamat

2.18. Definíció. A T_i , $i \geq 0$ felújítási folyamatot Poisson folyamatnak nevezzük, ha a Z_i , $i > 0$ véletlen változók exponenciális eloszlásúak.

A Poisson folyamatok tekinthetők speciális, "egy állapotú", Markov láncoknak. A Poisson folyamatok tulajdonságai [2]:

1. minden pillanatban teljesül a Markov tulajdonság
2. a felújítási intervallumok hossza azonos exponenciális eloszlású.
3. $(0, t)$ intervallumon befejeződő felújítási intervallumok száma λt paraméterű Poisson eloszlású, ahol λ az exponenciális eloszlású felújítási intervallum paramétere.
4. rövid idejű viselkedés:
 $(0, \Delta)$ intervallumon befejeződő felújítási intervallumok száma:
 - $0 - 1 - \lambda\Delta + \sigma(\Delta)$ valószínűséggel,
 - $1 - \lambda\Delta + \sigma(\Delta)$ valószínűséggel,
 - $> 1 - \sigma(\Delta)$ valószínűséggel.

2.6. Sztochasztikus folyamatok összefoglalása

A felsorolt sztochasztikus folyamatok közös jellemzője, hogy mindegyik folyamatban előfordulnak olyan (véletlen) időpillanatok, amelyekben a folyamatra teljesül a Markov tulajdonság.

A felsorolt sztochasztikus folyamatokat csoportosíthatjuk a szerint, hogy a mikor teljesítik a Markov tulajdonságot:

- Markov lánc: minden időpillanatban,

- Szemi-Markov folyamat: minden állapotátmenet pillanatában,
- Markov regeneratív folyamat: néhány (tipikusan állapotátmeneti) pillanatban,
- Felújítási folyamat: minden felújítási időpillanatban,
- Poisson folyamat: minden időpillanatban.

A Markov tulajdonság teljesülése lehetővé teszi egy általános elemzési módszer a felújítási elmélet alkalmazását. A módszer lényege, hogy az $(0, t)$ intervallum viselkedését elemezzük az első felújítási időpontra (T_1) adott feltétel alapján, majd a feltétel ismert eloszlása szerint meghatározzuk a feltétel nélküli jellemzőket.

Azokban az esetekben, amikor a vizsgált folyamat leírója lehetővé teszi a folyamat rövid időn belül bekövetkező eseményeinek számszerűsítését egy másik analízis módszer a folyamat evolúciós leírása is alkalmazható.

Ebben a fejezetben, amikor lehetett, bemutattuk mindkét módszer alkalmazását a felsorolt sztochasztikus folyamatok elemzésére, aminek legfőbb oka az, hogy a következő fejezetben ismertetésre kerülő modellek egy részére csak az egyik vagy csak a másik eljárás alkalmazható. Valamint akkor, ha mindkét módszer alkalmazható az (első lépésben kapott) eredmények más alakúak, és bár azonosak, egyszer az egyik másszor a másik leírás alkalmazása szolgáltat egyszerűbb kifejezéseket vagy jobb numerikus tulajdonságú numerikus módszereket.

3. fejezet

HOZAMMODELLEK

3.1. Hozam modellezés

Mint a bevezetőben már említettük a hozam modellezés célja, hogy valamilyen ismert sztochasztikus folyamattal leírható rendszer viselkedéséről, pontosabban teljesítmény jellemzőiről, nyerjünk bővebb információt. Ehhez a rendszer állapotváltozásain túl meg kell határozni a egyes állapotokban végzett munka jellemzőit, és azt, hogy mi történik az elvégzett ("felhalmozott") munkával az állapotátmenetekben.

A hozam modellezés alapvetően két fő kérdésre keresi a választ:

- Mennyi hozam halmozódik fel t idő alatt?
- Mennyi idő kell ez adott feladat elvégzéséhez (azaz adott mennyiségű hozam felhalmozásához)?

Az utóbbi jellemzőt teljesítési időnek (completion time) nevezik. Ezeket a teljesítményjellemzőket (felhalmozott hozam, teljesítési idő) a szerint is osztályozhatjuk, hogy a vizsgált rendszer vagy a felhasználó szempontjából jellemzi a teljesítményt. A felhalmozott hozamot jellemző paramétereket rendszer orientált, míg a teljesítési időt jellemző paramétereket felhasználó orientált teljesítmény jellemzőknek nevezik.

3.1.1. Felhalmozott hozam

Ha az $X(t) \in S$ folytonos idejű sztochasztikus folyamat írja le a vizsgált rendszerünk viselkedését, akkor a teljesítmény jellemzők meghatározásához S minden állapotához hozzárendelünk egy nem negatív számot, amely az adott állapotban a modellezett rendszer által egységnyi idő alatt elvégzett munkát (termelt hasznót) adja meg. Ezen mennyiség neve hozamráta (reward rate) tipikusan az i állapothoz rendelt hozamrátát r_i -vel jelölik.

Jelölje a t időpontig felhalmozott hozamot az $Y(t)$ valószínűségi változó. Egy adott időpontban a felhalmozás sebessége:

$$\frac{dY(t)}{dt} = r_i, \quad \text{ha } X(t) = i.$$

$Y(t)$ az $X(t)$ folyamattól függő sztochasztikus folyamat. Hozamvesztés mentes, hozamráta felhalmozásos esetben $Y(t)$ értékét egyértelműen meghatározza $X(\tau)$, $0 \leq \tau \leq t$ a következő sztochasztikus integrállal:

$$Y(t) = \int_0^t r_{X(\tau)} d\tau.$$

ami úgy is megfogalmazható, hogy

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n \int_0^t r_i I(X(\tau) = i) d\tau \quad (3.1)$$

Az utóbbi leírás értelmezéséhez tegyük fel, hogy $X(t)$ egy realizációja adott oly módon, hogy a $\underline{t} = \{t_1, \dots, t_n\}$ vektor t_i eleme magadja, hogy a folyamat mennyit tartózkodott az i állapotban. Ekkor a $t = \sum_{i=1}^n t_i$ időpontig előállított hozam

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n r_i t_i.$$

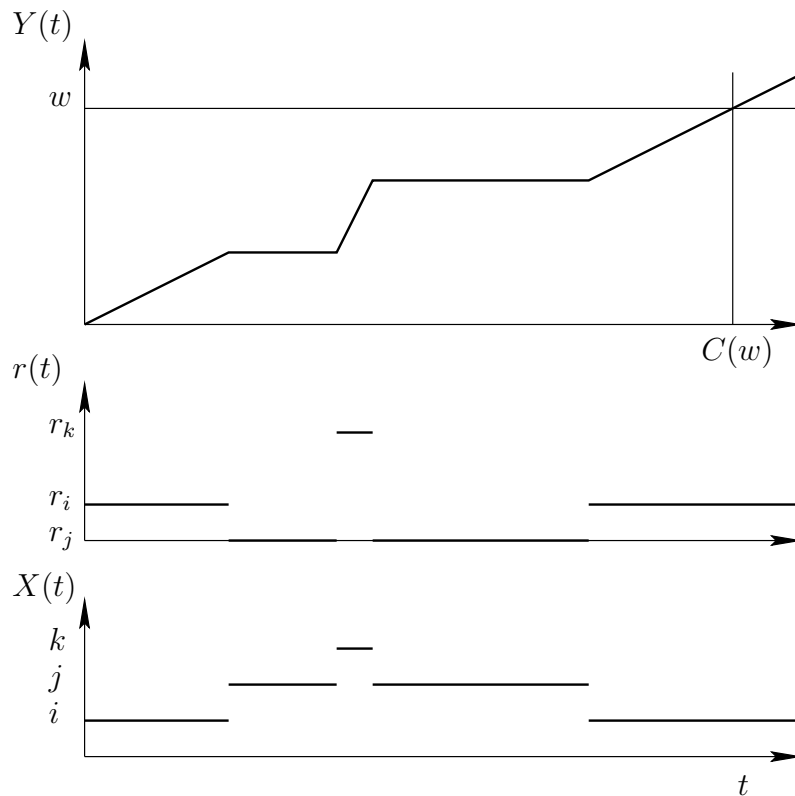
Az irodalomban tárgyalt különböző hozam modellek többsége megegyezik abban, hogy egy adott állapotban tartózkodás alatt lineárisan, r_i sebességgel történik a munkavégzés. Kivételként az inflációt is figyelembe vevő, u.n., értékcsökkenéses (discounted) felhalmozás említhető meg [4].

A hozam modellek sokszínűsége inkább az egyes állapotátmenetekben bekövetkező különböző típusú változásoknak köszönhető. A hozammodellek egy osztályánál az állapotátmenetek pillanatában az állapotátmenettől függő véletlen hozam halmozódik fel ("0 idő alatt"). Jelölje \mathcal{D}_{ij} és $D_{ij}(x)$ ($i, j \in S$) az i -ből j -be történő állapotátmenet során felhalmozásra kerülő, u.n. impulzus hozamot és annak eloszlását. Definíció szerint $\mathcal{D}_{ii} = 0$. Ekkor

$$Y(t) = \int_0^t \left(r_{X(\tau)} + \delta_\tau \mathcal{D}_{X(\tau^-), X(\tau)} \right) d\tau \quad (3.2)$$

ahol δ_τ a τ pontba tolt Dirack delta függvény. \mathcal{D} definíciója alapján látható, hogy $\mathcal{D}_{X(\tau^-), X(\tau)}$ csak az állapotátmeneti pillanatokban tér el 0-tól. A tisztán rétahozam felhalmozáshoz hasonlóan, ha a $(0, t)$ intervallumon az i -ből j -be lépések száma N_{ij} , akkor

$$Y(t) = \sum_{i=1}^n r_i t_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n N_{ij} \mathcal{D}_{ij} \quad (3.3)$$

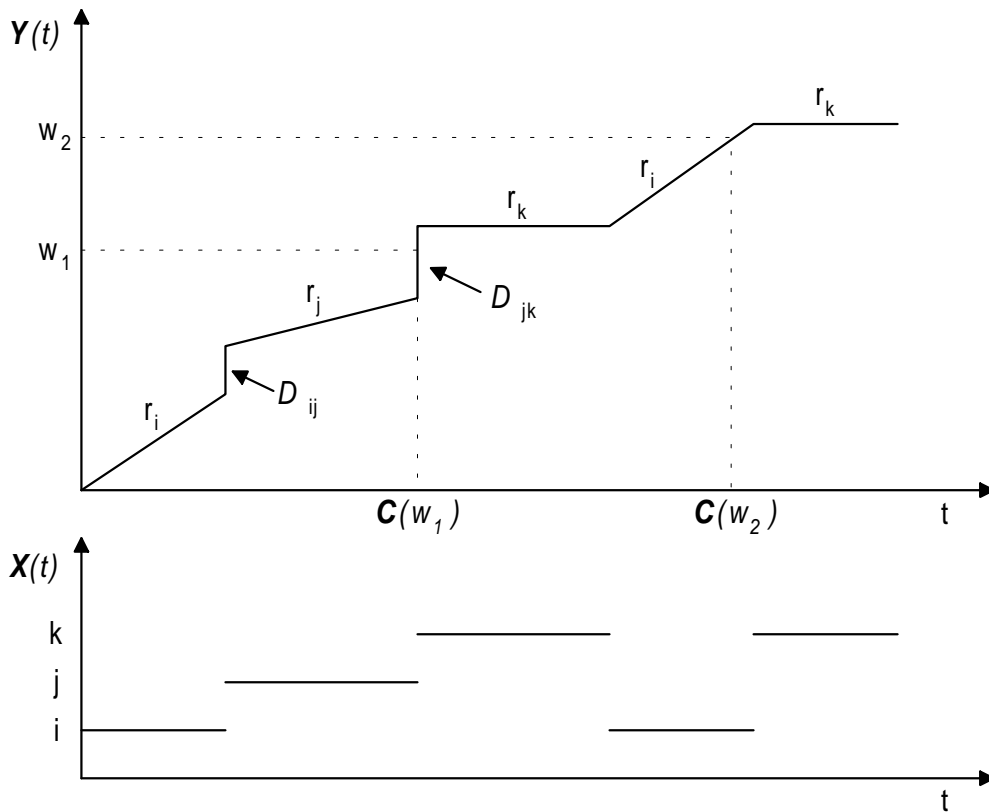


3.1. ábra. A felhalmozás folyamata

A felhalmozás jellegét tekintve tehát megkülönböztetünk csak ráta, illetve ráta és impulzus típusú hozam modelleket. (A tisztán impulzus felhalmozást ez utóbbi osztály speciális eseteként tekintik.)

Az eddigiekben ismerttetett modellek közös jellemzője, hogy a felhalmozott hozam értéke monoton növekszik. Az ilyen tulajdonságú hozammodellek gyűjtőneve hozamvesztés mentes modellek. Angol irodalomban "preemptive resume" néven hivatkoznak rájuk.

A hozam modellek másik nagy osztálya a hozamvesztéses modellek. Az irodalomban tipikusan alkalmazott hozamvesztéses modellekben a hozam veszteség a rendszer bizonyos állapotátmeneteihez rendeltén következik be (nem feltétlenül minden állapotátmenetben). Amennyiben egy állapotátmenet során az összes addig felhalmozott hozam elvesz teljes hozamvesztésről beszélünk (preemptive repeat), amennyiben viszont a felhalmozott hozamnak csak egy része vesz el, akkor részleges hozamvesztésről (partial reward loss).



3.2. ábra. Felhalmozás ráta és impulzus hozam esetén

Az alábbiakban ezeknek a hozam modellezési eseteknek az elemzését mutatjuk be különböző sztochasztikus folyamatokkal jellemezhető rendszerek esetén. A bemutatásra kerülő módszerek "állapotter homogén" viselkedést feltételeznek, azaz azt, hogy a rendszer összes állapotátmenetének ugyan olyan típusú hatása van a felhalmozott hozamra. Amennyiben ez a feltétel egy konkrét esetben nem teljesül, akkor a bemutatásra kerülő módszerek kombinációját kell alkalmazni az analízishez.

3.1.2. Teljesítési idő

A rendszer felhasználója szempontjából a rendszert leíró mennyiségek közül az az érdekes, amely megadja, hogy a rendszer adott hozamot mennyi idő alatt halmoz fel, azaz mennyi idő kell valamely munka elvégzéséhez (completion time). w elvégzendő munka esetén ezt a következő valószínűségi változó adja meg

$$C(w) = \min(t : Y(t) = w).$$

Ezen mennyiség eloszlása veszteségmentes esetben pedig felírható a t ideig felhalmozott munka eloszlásának felhasználásával:

$$F_{Comp}(t, w) = \mathbf{P}(C(w) \leq t) = \mathbf{P}(Y(t) \geq w) = 1 - \mathbf{P}(Y(t) < w)$$

Ha az elvégzendő munka mennyisége nem determinisztikus, akkor a következő véletlen változót használjuk:

$$C_W = \min(t : Y(t) = W),$$

ahol a W valószínűségi változó adja meg az előállítandó hozam mennyiségét. W eloszlását $G(w)$ -vel jelöljük. Azaz a C_W -vel jelölt véletlen változó megadja, hogy a rendszer $G(w)$ eloszlású hozamot mennyi idő alatt halmoz fel. C_W eloszlása kifejezhető $F_{Comp}(t, w)$ és a munkamennyiség eloszlásának segítségével:

$$\mathbf{P}(C_W < t) = \int_0^\infty F_{Comp}(t, w) dG(w).$$

3.2. Markovi rátahozam modellek

Ebben a fejezetben a vizsgált rendszer viselkedését folytonos idejű Markov lánc írja le, és a állapotátmenetek pillanatában nem történik hozam felhalmozás. Így csak az állapotokban tartózkodás alatt felhalmozott "rátahozam" analízisét végezzük.

3.2.1. Felhalmozott hozam – hozamvesztés mentes eset

Tekintsük az $X(t) \in S$ folytonos idejű, \mathbf{Q} generátormátrixú markov-láncot. A lánc minden állapothoz hozzárendelünk egy nem negatív számot, amely az adott állapotban a modellezett rendszer által egységnyi idő alatt termelt hasznot adja meg. A t időpontig felhalmozott hasznot az $Y(t)$ valószínűségi változó jelöli. Mint láttuk $Y(t)$ az $X(t)$ folyamattól függő sztochasztikus folyamat:

$$\frac{dY(t)}{dt} = r_i, \quad \text{ha } X(t) = i.$$

$Y(t)$ értékét egyértelműen meghatározza $X(\tau), 0 \leq \tau \leq t$ a következő sztochasztikus integrállal:

$$Y(t) = \int_0^t r_{X(\tau)} d\tau.$$

A folytonos Markov-láncok analízisének követett úthoz hasonlóan ez esetben is megadjuk mind az integrálegyenletes, mind a differenciálegyenletes leírást. Majd belátjuk a két megközelítés azonosságát Laplace-transzformált segítségével.

Analízis az állapotátmenetek vizsgálata alapján

A folyamat leírásának érdekében vezessük be a következő mennyiséget:

$$Y_{ij}(t, w) = \mathbf{P}(X(t) = j, Y(t) < w \mid X(0) = i, Y(0) = 0). \quad (3.4)$$

Használjuk a Markov-lánc integrálegyenletes leírásánál megismert módszert! $Y_{ij}(t, w)$ megadásához két esetet veszünk figyelembe:

- Ha a vizsgált t időpont előtt nem történt állapotátmenet, azaz a folyamat a t időpontig az i állapotban maradt, további két eset lehetséges:
 - Amennyiben $t < w/r_i$, az adott időpontig előállított hozam mennyisége nem érte el az w értéket, és így $Y_{ii}(t, w) = 1$,
 - ha $t \geq w/r_i$, a felhalmozott mennyiség nem kisebb mint w , azaz $Y_{ii}(t, w) = 0$.

Annak a valószínűsége, hogy a t időpontig a lánc az i állapotban marad: $e^{-q_i t}$.

- Amennyiben az adott t időpont előtt valamely $\tau, \tau < t$ időpontban állapotátmenet történik egy másik $k, k \neq i$ állapotba, $Y_{ij}(t, w)$ attól fog függeni, hogy mi történik a (τ, t) intervallumban. Az $i \rightarrow k$ átmenet valószínűsége: q_{ik}/q_i .

A fenti esetek figyelembevételével, ismerve az első állapotátmenet időpontjának sűrűségfüggvényét (q_i paraméterű exponenciális)

$$Y_{ij}(t, w) = \delta_{ij} e^{-q_i t} u(w - r_i t) + \int_0^t \sum_{k \in S, k \neq i} \frac{q_{ik}}{q_i} Y_{kj}(t - \tau, w - r_i \tau) q_i e^{-q_i \tau} d\tau, \quad (3.5)$$

ahol $u(x)$ az egységugrás függvény, azaz

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Azért, hogy a későbbiekben összehasonlíthassuk a két leírási módból származó eredményt, végezzünk Laplace-transzformációt először az idő-, majd a hozam-változó szerint.

$$Y_{ij}^*(s, w) = \delta_{ij} \int_0^\infty e^{-(s+q_i)t} u(w - r_i t) dt + \int_{t=0}^\infty \int_{\tau=0}^\infty \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} Y_{kj}(t - \tau, w - r_i \tau) e^{-st} e^{-q_i \tau} d\tau dt, \quad (3.6)$$

ami az egységugrás függvény értelmezésével, és a második tag integráljainak sorrendjének felcserélésével

$$\begin{aligned}
Y_{ij}^*(s, w) &= \delta_{ij} \int_0^{\frac{w}{r_i}} e^{-(s+q_i)t} dt + \\
&\int_{\tau=0}^{\infty} \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} \int_{t=\tau}^{\infty} Y_{kj}(t - \tau, w - r_i \tau) e^{-s(t-\tau)} dt e^{-q_i \tau} e^{-s\tau} d\tau = \\
&\frac{\delta_{ij}}{s + q_i} \left(1 - e^{-\frac{(s+q_i)w}{r_i}} \right) + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} \int_{\tau=0}^{\infty} Y_{kj}^*(s, w - r_i \tau) e^{-(s+q_i)\tau} d\tau.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Elvégezve a transzformációt a hozam-változó szerint

$$\begin{aligned}
Y_{ij}^{**}(s, v) &= \\
&\frac{\delta_{ij}}{s + q_i} \left(\frac{1}{v} - \frac{r_i}{vr_i + s + q_i} \right) + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} \int_{\tau=0}^{\infty} Y_{kj}^{**}(s, v) e^{-v\tau r_i} e^{-(s+q_i)\tau} d\tau = \\
&\frac{\delta_{ij}}{s + q_i} \frac{s + q_i}{v(vr_i + s + q_i)} + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} Y_{kj}^{**}(s, v) \frac{1}{vr_i + s + q_i} = \\
&\delta_{ij} \frac{1}{v} \frac{1}{vr_i + s + q_i} + \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ik} Y_{kj}^{**}(s, v) \frac{1}{vr_i + s + q_i}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Szorozva mindkét oldalt a $(vr_i + s + q_i)$ mennyiséggel, majd az összegzést kiegészítve a $k = i$ taggal

$$(vr_i + s)Y_{ij}^{**}(s, v) = \delta_{ij} \frac{1}{v} + \sum_{k \in S} q_{ik} Y_{kj}^{**}(s, v),$$

amely egyenlet mátrix jelölést használva

$$(s\mathbf{I} + v\mathbf{R})\mathbf{Y}^{**}(s, v) = \frac{1}{v}\mathbf{I} + \mathbf{Q} \mathbf{Y}^{**}(s, v),$$

ahol \mathbf{R} a hozamrátákból összeállított diagonálmátrix. Átrendezve

$$\mathbf{Y}^{**}(s, v) = \frac{1}{v}(s\mathbf{I} + v\mathbf{R} - \mathbf{Q})^{-1}. \tag{3.9}$$

Analízis rövid idejű viselkedés alapján

A folyamat differenciálegyenlettel való leírásához ugyanazokat az eseteket kell figyelembe vennünk valamely $(t, t + \Delta)$ intervallumban, mint a folytonos idejű Markov-lánc leírásánál:

- Nem történik átmenet az intervallumban. Ennek valószínűsége, feltéve, hogy az j állapotban van a lánc: $1 - q_j\Delta + o(\Delta)$. A Δ idő alatt felhalmozott hozam mennyisége Δr_j .
- Egy átmenet történik az intervallumban. Feltéve, hogy valamely $k, k \neq j$ állapotból léptünk az j állapotba, ezen esemény valószínűsége: $q_{kj}\Delta + o(\Delta)$. Az intervallum során előállított hozam mennyisége $O(\Delta)$, ahol $O(x)$ olyan függvény, hogy $\lim_{x \rightarrow 0} O(x) = 0$.
- Az intervallum során kettő vagy több átmenet történik $o(\Delta)$ valószínűséggel.

A fentiek alapján

$$Y_{ij}(t + \Delta, w) = (1 - q_j\Delta + o(\Delta)) Y_{ij}(t, w - \Delta r_j) + \sum_{k \in S, k \neq j} (q_{kj}\Delta + o(\Delta)) Y_{ik}(t, w - O(\Delta)) + o(\Delta),$$

amely, átrendezések után, az összegzést bővítve a $k \neq j$ taggal

$$Y_{ij}(t + \Delta, w) - Y_{ij}(t, w - \Delta r_j) = \sum_{k \in S} q_{kj}\Delta Y_{ik}(t, w - O(\Delta)) + o(\Delta),$$

a baloldalt átalakítva és osztva Δ -val,

$$\frac{Y_{ij}(t + \Delta, w) - Y_{ij}(t, w)}{\Delta} + \frac{r_j(Y_{ij}(t, w) - Y_{ij}(t, w - \Delta r_j))}{r_j\Delta} = \sum_{k \in S} q_{kj} Y_{ik}(t, w - O(\Delta)) + \frac{o(\Delta)}{\Delta},$$

amely kifejezés baloldalának második törtjét azért bővítettük az r_j taggal, hogy elvégezve a $\Delta \rightarrow 0$ határátmenetet a hozam-változó szerinti deriváltat kapjuk. Így $\Delta \rightarrow 0$ esetén

$$\frac{\partial Y_{ij}(t, w)}{\partial t} + r_j \frac{\partial Y_{ij}(t, w)}{\partial w} = \sum_{k \in S} q_{kj} Y_{ik}(t, w). \quad (3.10)$$

Mátrixjelölést használva:

$$\frac{\partial \mathbf{Y}(t, w)}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{Y}(t, w)}{\partial w} \mathbf{R} = \mathbf{Y}(t, w) \mathbf{Q}. \quad (3.11)$$

Laplace-transzformálva az időváltozó szerint

$$\mathbf{Y}^*(s, w) - \mathbf{Y}(0, w) + \frac{\partial \mathbf{Y}^*(s, w)}{\partial w} \mathbf{R} = \mathbf{Y}^*(s, w) \mathbf{Q},$$

ahol $\mathbf{Y}(0, w) = \mathbf{I}$, majd transzformálva a hozamváltozó szerint

$$\mathbf{Y}^{**}(s, v) - \frac{\mathbf{I}}{v} + v\mathbf{Y}^{**}(s, v)\mathbf{R} - \mathbf{Y}^*(s, 0)\mathbf{R} = \mathbf{Y}^{**}(s, v)\mathbf{Q},$$

ahol $\mathbf{Y}^*(s, 0) = \mathbf{0}$. A kapott kifejezés átalakítható az integrálegyenletes megközelítés végeredményeként adódó transzformált-tartománybeli egyenletté

$$\mathbf{Y}^{**}(s, v) = \frac{1}{v}(s\mathbf{I} + v\mathbf{R} - \mathbf{Q})^{-1}. \quad (3.12)$$

Az két vizsgálati módszer azonossága a Markov láncok viselkedésének analíziséhez hasonlóan nem csak transzformált tartományban, hanem a Volterra integrál egyenlet deriválásával is belátható. Deriválva a (3.5) egyenletet és elvégezve a Markov láncok analízisének alkalmazott átalakításokat (lásd (2.5)) (3.10) adódik.

Inaktív ($r_i = 0$) állapotok esete

Az eddig ismerttetett analízisben bizonyos értelemben kiszanáltuk, hogy a hozam ráta minden állapotban pozitív: $r_i > 0, i \in S$. Az állapotátmeneteken alapuló analízis (3.5) - (3.9) során a (3.7) egyenletben történt r_i -vel való osztás, ami miatt $r_i = 0$ hozamráta esetét külön kell kezelni. Azonban a (3.8) - (3.9) egyenletek már egyaránt korrektül írják le a $r_i = 0$ és a $r_i > 0$ eseteket.

A rövid idejű viselkedésen alapuló analízis idő tartományban (3.10) szintén korrektül leírja a $r_i = 0$ esetet. A transformáció során azonban figyelembe kell venni, hogy az inaktív állapotokban tartózkodás miatt $Y_{ij}^*(s, 0) \neq 0$, ha $r_i = r_j = 0$. Azonban, mivel az ezek a tagok r_i -vel szorozva vannak (3.12) szintén teljesül inaktív állapotot tartalmazó Markov hozam modell esetén.

3.2.2. Teljesítési idő – veszteségmentes eset

A rendszer felhasználója szempontjából a rendszert leíró mennyiségek közül az az érdekes, amely megadja, hogy a rendszer adott hozamot mennyi idő alatt állít elő, azaz mennyi idő kell valamely munka elvégzéséhez (completion time). Ezt a következő valószínűségi változó adja meg

$$C(w) = \min(t : Y(t) = w).$$

Ezen mennyiség eloszlása veszteségmentes esetben pedig felírható a t ideig felhalmozott munka eloszlásának felhasználásával:

$$F_{Comp}(t, w) = \mathbf{P}(C(w) \leq t) = \mathbf{P}(Y(t) \geq w) = 1 - \mathbf{P}(Y(t) < w) =$$

$$1 - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n Y_{ij}(t, w) P_i = 1 - \underline{P} \mathbf{Y}(t, w) \underline{1},$$

ahol $\underline{1}$ az 1-esekből álló vektor.

Ha az elvégzendő munka mennyisége nem determinisztikus, akkor a következő véletlen változót használjuk:

$$C_W = \min(t : Y(t) = W),$$

ahol a W valószínűségi változó adja meg az előállítandó hozam mennyiségét. W eloszlását $G(w)$ -vel jelöljük. Azaz a C_W -vel jelölt véletlen változó megadja, hogy a rendszer $G(w)$ eloszlású hozamot mennyi idő alatt halmoz fel. C_W eloszlása kifejezhető $F_{Comp}(t, w)$ és a munkamennyiség eloszlásának segítségével:

$$\mathbf{P}(C_W < t) = \int_0^\infty F_{Comp}(t, w) dG(w).$$

Analízis az állapotátmenetek alapján

A munka elvégzéséhez szükséges idő eloszlása másképp is kifejezhető: jelölje $F_i(t, w | T_1 = h)$ azt a valószínűséget, hogy a rendszer t -nél rövidebb idő alatt halmoz fel w hozamot, feltéve, hogy az i állapotból indult és az első állapotváltás időpontja h , azaz

$$F_i(t, w | T_1 = h) = \mathbf{P}(C(w) < t | T_1 = h, X(0) = i),$$

ez a valószínűség, aszerint, hogy a rendszer végez a munkával az első állapotváltás előtt vagy nem a következőképp írható:

$$F_i(t, w | T_1 = h) = \begin{cases} u(t - \frac{w}{r_i}) & hr_i \geq w \\ \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{q_i} F_j(t - h, w - r_i h) & hr_i < w \end{cases} \quad (3.13)$$

Laplace-Stieltjes transzformálva t szerint

$$F_i^\sim(s, w | T_1 = h) = \begin{cases} e^{-s \frac{w}{r_i}} & hr_i \geq w \\ e^{-sh} \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{q_i} F_j^\sim(s, w - r_i h) & hr_i < w \end{cases}$$

majd Laplace transzformációt végezve w szerint

$$F_i^{\sim*}(s, v | T_1 = h) = \int_{w=0}^{hr_i} e^{-vw} e^{-s \frac{w}{r_i}} dw + e^{-(s+vr_i)h} \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{q_i} F_j^{\sim*}(s, v).$$

Feloldva az első állapotátmenet időpontjára tett feltételt kapjuk azt a valószínűséget, hogy a rendszer t -nél rövidebb idő alatt halmoz fel w hozamot, feltéve, hogy az i állapotból indult, azaz

$$F_i(t, w) = \mathbf{P}(C(w) < t \mid X(0) = i), \quad (3.14)$$

aminek t szerinti transzformáltja

$$F_i^{\sim*}(s, v) = \int_{h=0}^{\infty} e^{-q_i h} q_i \int_{w=0}^{hr_i} e^{-vw} e^{-s \frac{w}{r_i}} dw dh + \int_{h=0}^{\infty} e^{-q_i h} q_i e^{-(s+vr_i)h} \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{q_i} F_j^{\sim*}(s, v) dh,$$

kiszámítva az integrálokat

$$F_i^{\sim*}(s, v) = \frac{r_i}{q_i + s + r_i v} + \frac{1}{q_i + s + r_i v} \sum_{j=1, i \neq j}^n q_{ij} F_j^{\sim*}(s, v),$$

ami átalakítások után a következő egyszerű formára hozható:

$$(s + r_i v) F_i^{\sim*}(s, v) = r_i + \sum_{j=1}^n q_{ij} F_j^{\sim*}(s, v).$$

Sorvektorba rendezve az $F_i^{\sim*}(s, v)$ mennyiségeket és átrendezve az egyenletet

$$\underline{F}^{\sim*}(s, v) = (s\mathbf{I} + v\mathbf{R} - \mathbf{Q})^{-1} \underline{r}, \quad (3.15)$$

ahol \underline{r} a rátákból alkotott vektort jelöli.

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az előző eredmény összhangban van az $\mathbf{Y}^{**}(s, v)$ mátrixra felírt eredménnyel (3.9). Visszatekintve $Y_{ij}(t, w)$ és $F_i(t, w)$ definíciójára (3.4, 3.14), a következő összefüggésnek teljesülnie kell:

$$\sum_{j=1}^n Y_{ij}(t, w) = 1 - F_i(t, w),$$

amely mátrixjelölést használva

$$\mathbf{Y}(t, w) \underline{\mathbf{1}} = \underline{\mathbf{1}} - \underline{F}(t, w).$$

Az előző egyenletet mindkét változója szerint Laplace-Stieltjes transzformálva

$$\mathbf{Y}^{\sim\sim}(s, v) \underline{\mathbf{1}} = \underline{\mathbf{1}} - \underline{F}^{\sim\sim}(s, v),$$

Behelyettesítve a (3.9), (3.15) egyenleteket, és kihasználva a Laplace- és a Laplace-Stieltjes transzformáltak közötti kapcsolatot

$$s(s\mathbf{I} + v\mathbf{R} - \mathbf{Q})^{-1} \underline{\mathbf{1}} = \underline{\mathbf{1}} - v(s\mathbf{I} + v\mathbf{R} - \mathbf{Q})^{-1} \underline{r},$$

amely egyenlőségről némi algebrai átrendezés után (pl.: szorozva mindkét oldalt balról $(s\mathbf{I} + v\mathbf{R} - \mathbf{Q})$ -vel és kihasználva, hogy $\mathbf{Q} \underline{\mathbf{1}} = \mathbf{0}$) könnyen látható, hogy teljesül.

Analízis rövid idejű viselkedés alapján

A $B(t)$ függvény monotonitását kihasználva kiszámíthatjuk az

$$F_i(t, w) = \mathbf{P}(C(w) < t \mid X(0) = i),$$

mennyiséget a háttér Markov lánc rövid idejű viselkedését elemezve. A teljesítési idő elemzésénél azonban nem használhatjuk a megszokott t és $t + \Delta$ időpontokra vonatkozó analízist, mert a t és $t + \Delta$ közti teljesítés valószínűsége függ a t ideig felhalmozott hozam mennyiségétől, amit viszont nem tartalmaz az $F_i(t, w)$ leíró. Az analízist így a $(0, \delta)$ és a (δ, t) intervallumok vizsgálatára bontjuk fel. Figyelembe véve a Markov lánc $(0, \delta)$ intervallumon lehetséges viselkedését a megfelelő valószínűségekkel súlyozva azt kapjuk, hogy

$$F_i(t, w) = (1 - q_i \Delta + o(\Delta)) F_i(t - \Delta, w - \Delta r_i) + \sum_{k \in S, k \neq i} (q_{ik} \Delta + o(\Delta)) F_k(t - \Delta, w - O(\Delta)) + o(\Delta),$$

Amiből megszokott analízis lépések után azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial t} F_i(t, w) + r_i \frac{\partial}{\partial w} F_i(t, w) = \sum_{k \in S} q_{ik} F_k(t, w) .$$

Mátrix alakra hozva a kifejezést azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{F}(t, w) + \mathbf{R} \frac{\partial}{\partial w} \underline{F}(t, w) = \mathbf{Q} \underline{F}(t, w) . \quad (3.16)$$

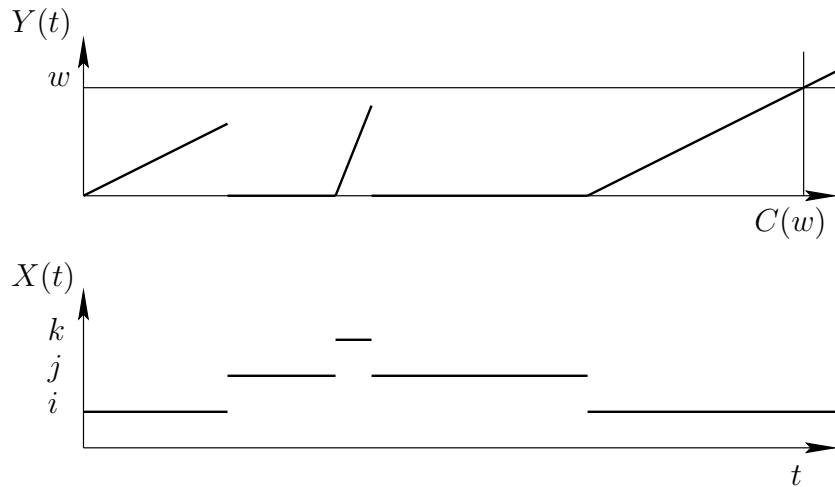
Észre kell vennünk egy nagyon fontos különbséget (3.11) és (3.16) között. Az egyik esetben jobbról, míg a másik esetben balról szorzunk a \mathbf{Q} mátrixal. Az előbbi esetet nevezik „forward”, míg az utóbbit „backward” típusú leírásnak. Folytonos idejű Markov láncok tranzienst vizsgálataira mindkét leírás alkalmazható, azonban a hozam mértékek elemzésénél ez már nem minden esetben teljesül.

3.2.3. Teljes munkavesztéses rendszerek

Ezen szakaszban olyan hozammodellekkel foglalkozunk, amelyekben a háttér Markov-lánc állapotátmeneteinek hatására az addig felhalmozott munka elveszik, azaz

$$\text{ha } X(t^-) = i, X(t^+) = j \text{ és } i \neq j \text{ akkor } Y(t^+) = 0.$$

A felhalmozott hozam értéket ez a viselkedés egyértelműen meghatározza, azonban a teljesítési idő meghatározásához meg kell határozni, hogy mi történik az elvégzendő (véletlen) munkamennyiséggel a munkavesztés hatására. Kétféle modellt különböztetünk meg:



3.3. ábra. Munkavesztés, változatlan munkamennyiség (*pri*)

- az elvégzendő munka mennyisége nem változik munkavesztéskor (preemptive repeat identical, *pri*) (3.3 ábra),
- az elvégzendő munka mennyisége változik munkavesztéskor (preemptive repeat different, *prd*), azaz az elvégzendő munka mennyiségét $G(w)$ szerint *újra sorsoljuk* a háttér Markov-lánc állapotátmeneteikor (3.4 ábra).

A két modell megegyezik, ha az elvégzendő munka mennyisége determinisztikus eloszlású.

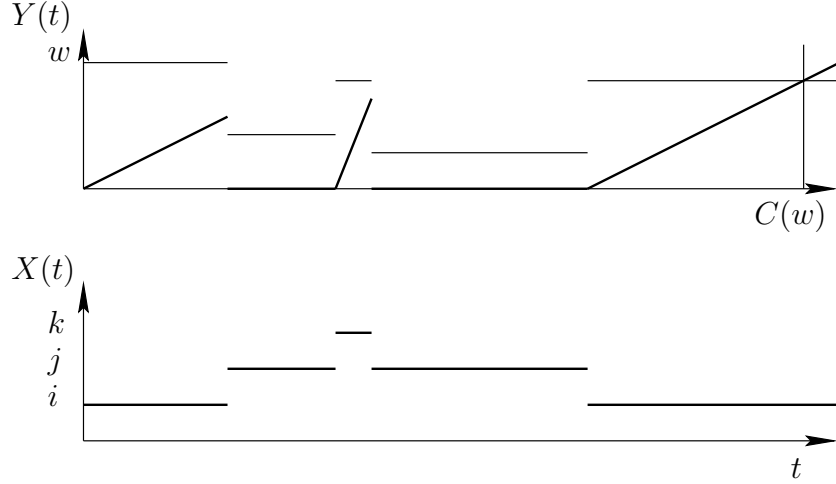
Emlékezzünk, hogy nem monoton hozam felhalmozás (hozam vesztés) esetén a felhalmozott hozam és a teljesítési idő eloszlása már nincs olyan szoros kapcsolatban, hiszen:

$$\mathbf{P}(C(w) \leq t) \neq \mathbf{P}(Y(t) \geq w) = 1 - \mathbf{P}(Y(t) < w) .$$

Változatlan munkamennyiség (*pri*)

Az eddigiekhez hasonlóan $F_i(t, w \mid T_1 = h)$ jelölje azt a valószínűséget, hogy t -nél kevesebb idő szükséges w hozam létrehozásához, azzal feltétellel, hogy a rendszer az i állapotból indult és az első állapotátmenet $T_1 = h$ időpontban következett be, azaz

$$F_i(t, w \mid T_1 = h) = \mathbf{P}(C(w) \leq t \mid X(0) = i, T_1 = h),$$



3.4. ábra. Munkavesztés, változó munkamennyiség (*prd*)

ekkor két esetet különböztethetünk meg aszerint, hogy az első állapotváltás előtt megtörtént-e a kívánt munka elvégzése, vagy nem, azaz

$$F_i(t, w | T_1 = h) = \begin{cases} u(t - \frac{w}{r_i}) & hr_i \geq w \\ \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{q_i} F_j(t - h, w) & hr_i < w \end{cases} \quad (3.17)$$

Összehasonlítva a munkavesztés nélküli rendszert leíró egyenletet (3.13) az előző egyenlettel, jól láthatjuk, mi a különbség a kétféle modell leírása között. Ha nincs munkavesztés, az első állapotátmenet után már csak $w - r_i h$ a felhalmozandó hozam mennyisége. Ha viszont a munka elveszik, a hátralévő munka mennyisége *visszaugrik* w -re. Elvégezve (3.17) t szerinti Laplace-Stieltjes transzformálását

$$F_i^{\sim}(s, w | T_1 = h) = \begin{cases} e^{-s \frac{w}{r_i}} & hr_i \geq w \\ e^{-sh} \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{q_i} F_j^{\sim}(s, w) & hr_i < w \end{cases}$$

amiből, ismerve az első állapotváltás időpontjának eloszlását, felírhatjuk a következő feltétel nélküli valószínűség

$$F_i^{\sim}(t, w) = \mathbf{P}(C(w) \leq t | X(0) = i)$$

Laplace-Stieltjes transzformáltját, ami

$$\begin{aligned}
F_i^\sim(s, w) &= \int_{h=w/r_i}^{\infty} e^{-s\frac{w}{r_i}} e^{-q_i h} q_i dh + \int_{h=0}^{w/r_i} e^{-sh} e^{-q_i h} q_i \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{q_i} F_j^\sim(s, w) dh = \\
&e^{-s\frac{w}{r_i}} \int_{h=w/r_i}^{\infty} e^{-q_i h} q_i dh + \sum_{j=1, i \neq j}^n q_{ij} \int_{h=0}^{w/r_i} e^{-sh} e^{-q_i h} dh F_j^\sim(s, w) = \\
&e^{-(s+q_i)\frac{w}{r_i}} + \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{s+q_i} \left(1 - e^{-(s+q_i)\frac{w}{r_i}}\right) F_j^\sim(s, w).
\end{aligned}$$

Ismerve az elvégzendő munka mennyiségét, valamint az egyes állapotok kezdeti valószínűségét, kifejezhetjük a munka elvégzéséhez szükséges idő eloszlásának Laplace-Stieltjes transzformáltját:

$$\begin{aligned}
F_{Comp}^\sim(s) &= \int_0^{\infty} \sum_{i=1}^n p_i(0) F_i^\sim(s, w) dG(w) = \\
&\int_0^{\infty} \underline{P}(0) \underline{F}^\sim(s, w) dG(w)
\end{aligned}$$

Változó munkamennyiség (*prd*)

Ebben az esetben azt a valószínűséget írjuk fel, hogy a rendszer t előtt végez, feltéve, hogy az i állapotban indult, w mennyiségű hozamot kell létrehoznia, és az első állapotváltás h idő után következik be:

$$F_i(t \mid T_1 = h, W = w) = \mathbf{P}(C(w) \leq t \mid X(0) = i, T_1 = h),$$

amely valószínűség az előzőekben látott módon két részből tevődik össze

$$F_i(t \mid T_1 = h, W = w) = \begin{cases} u(t - \frac{w}{r_i}) & hr_i \geq w \\ \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{q_i} F_j(t - h) & hr_i < w \end{cases}$$

ahol $F_i(t)$ az a valószínűség, hogy a rendszer a t időpont előtt végez, feltéve, hogy az i állapotból indult, azaz

$$F_i(t) = \mathbf{P}(C_W \leq t \mid X(0) = i).$$

Laplace-Stieltjes transzformálva az $F_i(t | T_1 = h, W = w)$ mennyiségre kapott kifejezést t szerint kapjuk, hogy

$$F_i^\sim(s | T_1 = h, W = w) = \begin{cases} e^{-s\frac{w}{r_i}} & hr_i \geq w \\ e^{-sh} \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{q_i} F_j^\sim(s) & hr_i < w \end{cases}$$

Ismerve W eloszlását felírhatjuk a

$$F_i(t | T_1 = h) = \mathbf{P}(C_W \leq t | X(0) = i, T_1 = h)$$

valószínűség Laplace-Stieltjes transzformáltját, ami

$$F_i^\sim(s | T_1 = h) = \int_{w=0}^{hr_i} e^{-s\frac{w}{r_i}} dG(w) + \int_{w=hr_i}^{\infty} e^{-sh} \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{q_i} F_j^\sim(s) dG(w)$$

Majd feloldva az első állapotátmenet idejére tett feltételt, $F_i(t)$ Laplace-Stieltjes transzformáltja:

$$\begin{aligned} F_i^\sim(s) &= \int_{w=0}^{\infty} \int_{h=w/r_i}^{\infty} e^{-s\frac{w}{r_i}} q_i e^{-q_i h} dh dG(w) + \\ &\int_{w=0}^{\infty} \int_{h=0}^{w/r_i} e^{-sh} q_i e^{-q_i h} dh \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{q_i} F_j^\sim(s) dG(w) = \\ &\int_{w=0}^{\infty} e^{-(s+q_i)\frac{w}{r_i}} dG(w) + \\ &\int_{w=0}^{\infty} \frac{q_i}{s+q_i} \left(1 - e^{-(s+q_i)\frac{w}{r_i}}\right) \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{q_i} F_j^\sim(s) dG(w) = \\ &G^\sim\left(\frac{s+q_i}{r_i}\right) + \sum_{j=1, i \neq j}^n \frac{q_{ij}}{s+q_i} \left(1 - G^\sim\left(\frac{s+q_i}{r_i}\right) F_j^\sim(s)\right) \end{aligned}$$

Ismerve az egyes állapotok kezdeti valószínűségét, a teljesítési idő eloszlásának transzformáltja a kezdeti állapottól függetlenül:

$$F_{Comp}^\sim(s) = \sum_{i=1}^n p_i(0) F_i^\sim(s) = \underline{P}(0) \underline{F}^\sim(s).$$

Felhalmozott hozam

A felhalmozott hozam $Y(t)$ eloszlásának jellemzésére vezessük be a

$$b_i(t, x) = \frac{\mathbf{P}(x \leq Y(t) < x + \Delta, X(t) = i)}{\Delta},$$

függvényt. Jól látható, hogy a teljes hozamvesztéses esetben a felhalmozott hozam mennyisége nagyon hasonlóan viselkedik a Szemi-Markov folyamat segédváltozójának viselkedéséhez. Ezért $b_i(t, x)$ analízisét a segédváltozók módszeréhez hasonlóan a rövid idejű viselkedés elemzésével végezzük:

$$\begin{aligned} b_i(t + \Delta, x) = & \\ & \Pr(\text{nincs állapot átlépés } (t, t + \Delta) \text{ intervallumban}) b_i(t + \Delta, x \mid \text{nincs átlépés}) + \\ & \Pr(\text{állapot átlépés } (t, t + \Delta) \text{ intervallumban}) b_i(t + \Delta, x \mid \text{átlépés}) \end{aligned}$$

Mivel az i állapotban eltöltött idő $-q_{ii}$ paraméterű exponenciális eloszlású, így az átlépés valószínűsége:

$$\Pr(\text{állapot átlépés } (t, t + \Delta) \text{ intervallumban}) = -q_{ii}\Delta + \sigma(\Delta)$$

és

$$\Pr(\text{nincs állapot átlépés } (t, t + \Delta) \text{ intervallumban}) = 1 + q_{ii}\Delta + \sigma(\Delta) .$$

Annak valószínűsége, hogy az átlépést követő pillanatban $Y(t + \Delta) > \Delta$ nulla, így:

$$b_i(t + \Delta, x \mid \text{átlépés}) = 0 \quad \text{ha } x > 0 .$$

Így

$$\begin{aligned} b_i(t + \Delta, x) = & \\ & \Pr(\text{nincs állapot átlépés } (t, t + \Delta) \text{ intervallumban}) h_i(t + \Delta, x \mid \text{nincs átlépés}) = \\ & (1 + q_{ii}\Delta + \sigma(\Delta)) b_i(t, x - r_i\Delta) \end{aligned}$$

Az kapott kifejezés alapján ismét lépésenként végezzük a $b_i(t, x)$ mennyiséget leíró parciális differenciálegyenlet felírását:

$$b_i(t + \Delta, x) - b_i(t, x - r_i\Delta) = (q_{ii}\Delta + \sigma(\Delta)) b_i(t, x - r_i\Delta)$$

$$b_i(t + \Delta, x) - b_i(t, x) + b_i(t, x) - b_i(t, x - r_i\Delta) = (q_{ii}\Delta + \sigma(\Delta)) b_i(t, x - r_i\Delta)$$

$$\frac{b_i(t + \Delta, x) - b_i(t, x)}{\Delta} + r_i \frac{b_i(t, x) - b_i(t, x - r_i \Delta)}{r_i \Delta} = (q_{ii} + \frac{\sigma(\Delta)}{\Delta}) b_i(t, x - r_i \Delta)$$

végül elvégezzük a $\Delta \rightarrow 0$ határátmenetet, amiből az $x > 0$ esetre vonatkozó parciális differenciál egyenlet:

$$\frac{\partial b_i(t, x)}{\partial t} + r_i \frac{\partial b_i(t, x)}{\partial x} = -\lambda_i(x) b_i(t, x) \quad (3.18)$$

Az $x = 0$ esetet írjuk fel a következő valószínűséget:

$$\Pr(X(t + \Delta) = i, Y(t) < \Delta) = \sum_{k \in S, k \neq i} \int_{x=0}^{\infty} \Pr(X(t) = k, Y(t) = x, \text{átlépés } (t, t + \Delta)\text{-ben az } i \text{ állapotba}) dx$$

ahol az átlépési valószínűség:

$$\Pr(\text{átlépés } (t, t + \Delta)\text{-ben } k\text{-ból } i\text{-be}) = q_{ki} \Delta + \sigma(\Delta)$$

független $Y(t)$ értékétől.

Ennek felhasználásával

$$\Pr(X(t + \Delta) = i, Y(t) < \Delta) = h_i(t + \Delta, 0) \Delta = \sum_{k \in S, k \neq i} (q_{ki} \Delta + \sigma(\Delta)) \int_{x=0}^{\infty} h_k(t, x) dx ,$$

amiből Δ -val oszva és a $\Delta \rightarrow 0$ határátmenetet képezve

$$h_i(t, 0) = \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ki} \int_{x=0}^{\infty} h_k(t, x) dx = \sum_{k \in S, k \neq i} q_{ki} \Pr(X(t) = k) . \quad (3.19)$$

Az állapotátmeneti intenzitások $Y(t)$ -től való függetlensége miatt egyszerűbb, másrészt a felhalmozott hozam szerinti parciális deriválnál szereplő r_i együttható miatt bonyolultabb a (3.18) parciális differenciál egyenlet és a (3.19) peremfeltétel páros mint a Szemi-Markov folyamatok segédváltozós leírása.

3.3. Markovi impulzus- és rátahozam modellek

Ebben a fejezetben a vizsgált rendszer viselkedését az eddigiekhez hasonlóan folytonos idejű Markov lánc írja le, viszont nem csak az állapotokban tartózkodás során, hanem az állapotátmenetek pillanatában is történik hozam felhalmozás.

Az állapot-homogén impulzus- és ráta-hozam modellek egyben veszteségmentesek is, mivel az állapotokban nem veszteség, hanem további felhalmozás következik be. Természetesen definiálhatók összetettebb modellek is, azonban ebben az alfejezetben csak a tisztán veszteségmentes rendszereket elemzünk.

3.3.1. Felhalmozott hozam

Analízis rövid idejű viselkedés alapján

$Y_{ij}(t + \Delta, w)$ meghatározásához tekintsük a $(t, t + \Delta)$ intervallumban bekövetkező érdemi eseteket:

- Nem történik átmenet az intervallumban $1 + q_{jj}\Delta + o(\Delta)$ valószínűséggel. Ekkor a Δ idő alatt felhalmozott hozam mennyisége Δr_j .
- A $k, k \neq j$ állapotból léptünk az j állapotba az intervallumban $q_{kj}\Delta + o(\Delta)$ valószínűséggel. Ekkor az intervallum során felhalmozott hozam mennyisége $\mathcal{D}_{kj} + O(\Delta)$ (ahol $\lim_{x \rightarrow 0} O(x) = 0$).
- Az intervallum során kettő vagy több átmenet történik $o(\Delta)$ valószínűséggel.

A fentiek alapján

$$Y_{ij}(t + \Delta, w) = (1 + q_{jj}\Delta + o(\Delta)) Y_{ij}(t, w - \Delta r_j) + \sum_{k \in S, k \neq j} (q_{kj}\Delta + o(\Delta)) \int_{x=0}^w Y_{ik}(t, w - x - O(\Delta)) dD_{kj}(x) + o(\Delta),$$

ahol az impulzus reward eloszlása szerinti integrál jelenik meg a második tagban. Figyelembe véve, hogy $\mathcal{D}_{jj} = 0$ és $\Delta r_j = O(\Delta)$ azt írhatjuk, hogy

$$Y_{ij}(t + \Delta, w) - Y_{ij}(t, w - \Delta r_j) = q_{jj}\Delta \int_{x=0}^w Y_{ij}(t, w - x - O(\Delta)) dD_{jj}(x) + \sum_{k \in S, k \neq j} q_{kj}\Delta \int_{x=0}^w Y_{ik}(t, w - x - O(\Delta)) dD_{kj}(x) + o(\Delta)$$

amely, átrendezések után (a szummát bővítve a $k = j$ taggal, és osztva Δ -val):

$$\frac{Y_{ij}(t + \Delta, w) - Y_{ij}(t, w)}{\Delta} + \frac{r_j(Y_{ij}(t, w) - Y_{ij}(t, w - \Delta r_j))}{r_j\Delta} = \sum_{k \in S} q_{kj} \int_{x=0}^w Y_{ik}(t, w - x - O(\Delta)) dD_{kj}(x) + \frac{o(\Delta)}{\Delta},$$

ahonnét $\Delta \rightarrow 0$ esetén

$$\frac{\partial Y_{ij}(t, w)}{\partial t} + r_j \frac{\partial Y_{ij}(t, w)}{\partial w} = \sum_{k \in S} q_{kj} \int_{x=0}^w Y_{ik}(t, w-x) dD_{kj}(x).$$

E parciális differenciál egyenletet zárt alakra hozhatjuk Laplace transzformált tartományban. Először Laplace-transzformálunk az időváltozó szerint:

$$Y_{ij}^*(s, w) - Y_{ij}(0, w) + r_j \frac{\partial Y_{ij}^*(s, w)}{\partial w} = \sum_{k \in S} q_{kj} \int_{x=0}^w Y_{ik}^*(s, w-x) d D_{kj}(x) ,$$

ahol $Y_{ij}(0, w) = \delta_{ij}$ (1, ha a vizsgált kezdő és végállapot megegyezik, különben 0). Bevezetve az impulzus reward sűrűség függvényét $d_{kj}(x) = d D_{kj}(x)/dx$ majd transzformálva a hozamváltozó szerint az kapjuk, hogy

$$Y_{ij}^{**}(s, v) - \frac{\delta_{ij}}{v} + r_j v Y_{ij}^{**}(s, v) - r_j Y_{ij}^*(s, 0) = \sum_{k \in S} q_{kj} Y_{ik}^{**}(s, v) d_{kj}^*(v) ,$$

ahol $Y_{ij}^*(s, 0) = 0$. Jelölje az elemenkénti mátrix szorzást a \odot operátor. Ennek segítségével a skalár egyenlet mátrixos alakba hozható:

$$\mathbf{Y}^{**}(s, v) - \frac{\mathbf{I}}{v} + v \mathbf{Y}^{**}(s, v) \mathbf{R} - \mathbf{Y}^{**}(s, 0) \mathbf{R} = \mathbf{Y}^{**}(s, v) \mathbf{Q} \odot \mathbf{d}^*(v),$$

Amiből $\mathbf{Y}^{**}(s, v)$ kifejezhető:

$$\mathbf{Y}^{**}(s, v) = \frac{1}{v} (s \mathbf{I} + v \mathbf{R} - \mathbf{Q} \odot \mathbf{d}^*(v))^{-1}.$$

3.3.2. Teljesítési idő

Mivel a hozam felhalmozás az állapothomogén impulzus- és rátahozam modellekben monoton (veszteségmentes), ezért a

$$\mathbf{P}(C(w) \leq t) = \mathbf{P}(Y(t) \geq w) = 1 - \mathbf{P}(Y(t) < w) .$$

alkalmazható a teljesítési idő eloszlásának meghatározására.

3.4. Szemi-Markov rátahozam modellek

A Szemi-Markov hozammodellek vizsgálatát az állapotátmenetek vizsgálatán alapuló módszerekkel teljesen hasonlóan végezhetjük, mint a Markovi hozammodellekét, csak

az állapot tartási idő és a következő állapot eloszlását a Szemi-Markov folyamat kernel mátrixa alapján kell meghatározni. A $Q(t)$ kernellet és r_i hozamrátával definiált Szemi-Markov hozamfolyamatok analízisét a w munkamennyiség felhalmozásához szükséges $C(w)$ teljesítési idő elemzésével szemléltetjük. Egyúttal azt is bemutatjuk, hogy az állapot átmenetek elemzésén alapuló eljárás egyes lépései (transzformáció, feltétel feloldás) tetszőleges sorrendben hajthatók végre. Definiáljuk a

$$C_i(t, w) = \Pr(C(w) \leq t | Z(0) = i)$$

függvényt és írjuk fel a teljesítési idő feltételes eloszlását az első állapotátmenetre vonatkozó $T_1 = h$ feltétel mellett:

$$C_i(t, w | T_1 = h) = \begin{cases} U\left(t - \frac{w}{r_i}\right) & h r_i \geq w \\ \sum_{k \in S} \frac{dQ_{ik}(h)}{dQ_i(h)} \cdot C_k(t - h, w - h r_i) & h r_i < w \end{cases} \quad (3.20)$$

Laplace-Stieltjes transformáljuk a kapott kifejezést az t szerint

$$C_i^{\sim}(s, w | T_1 = h) = \begin{cases} e^{-s \frac{w}{r_i}} & h r_i \geq w \\ \sum_{k \in S} \frac{dQ_{ik}(h)}{dQ_i(h)} \cdot e^{-sh} C_k^{\sim}(s, w - h r_i) & h r_i < w \end{cases} \quad (3.21)$$

A feltétel eloszlása $\Pr(T_1 < t) = Q_i(t)$ alapján meghatározzuk a feltétel nélküli teljesítési időt:

$$C_i^{\sim}(s, w) = \int_{h=\frac{w}{r_i}}^{\infty} e^{-s \frac{w}{r_i}} dQ_i(h) + \int_{h=0}^{\frac{w}{r_i}} \sum_{k \in S} \frac{dQ_{ik}(h)}{dQ_i(h)} \cdot e^{-sh} C_k^{\sim}(s, w - h r_i) dQ_i(h) = \quad (3.22)$$

$$e^{-s \frac{w}{r_i}} \left(1 - Q_i\left(\frac{w}{r_i}\right)\right) + \sum_{k \in S} \int_{h=0}^{\frac{w}{r_i}} e^{-sh} C_k^{\sim}(s, w - h r_i) dQ_{ik}(h)$$

Majd az utolsó lépésben Laplace transformálunk a w változó szerint:

$$\begin{aligned}
C_i^{\sim*}(s, v) &= \int_{w=0}^{\infty} e^{-vw} C_i^{\sim}(s, w) dw = \\
&\int_{w=0}^{\infty} e^{-vw} e^{-s \frac{w}{r_i}} dw - \int_{w=0}^{\infty} e^{-\frac{w}{r_i}(s+r_i v)} Q_i\left(\frac{w}{r_i}\right) r_i d\frac{w}{r_i} \\
&\quad + \sum_{k \in S} \int_{w=0}^{\infty} e^{-vw} \int_{h=0}^{\frac{w}{r_i}} e^{-sh} C_k^{\sim}(s, w - hr_i) dQ_{ik}(h) dw = \\
&\frac{r_i}{vr_i + s} - r_i Q_i^*(s + r_i v) \\
&\quad + \sum_{k \in S} \int_{h=0}^{\infty} e^{-sh} e^{-vhr_i} \int_{w=hr_i}^{\infty} e^{-v(w-hr_i)} C_k^{\sim}(s, w - hr_i) dw dQ_{ik}(h)
\end{aligned} \tag{3.23}$$

Végül, kihasználva, hogy a w szerinti integrál $C_k^{\sim}(s, w)$ Laplace transformáltját, a h szerinti integrál pedig $Q_{ik}(t)$ $s + vr_i$ transformált változó szerinti Laplace Stieltjes transzformáltját adja, a Szemi-Markov hozamfolyamat teljesítési idejének kettős transformált tartománybeli kifejezése:

$$C_i^{\sim*}(s, v) = \frac{r_i [1 - Q_i^{\sim}(s + vr_i)]}{s + vr_i} + \sum_{k \in \Omega} Q_{ik}^{\sim}(s + vr_i) C_k^{\sim*}(s, v) \tag{3.24}$$

3.5. A felhalmozott hozam momentumai

Az eddigiekben a teljesítményjellemzők eloszlását meghatározó módszereket ismertettünk. Ebben a fejezetben a Markovi veszteség mentes modell felhalmozott hozamának vizsgálatán keresztül bemutatjuk, hogy a teljesítmény jellemzők várható értékének meghatározására egyszerűbb eljárások is alkalmazhatók, és azt is, hogy ezek az egyszerű eljárások miért nem használhatóak magasabb momentumok számítására.

3.5.1. A felhalmozott rátahozam várható értéke

A $(0, T)$ intervallumon az i állapotban eltöltött időt jelölje τ_i (v.v.):

$$\tau_i = \int_0^T I(X(t) = i) dt ,$$

ahol $I(\cdot)$ indikátor függvény, melynek értéke 1, ha argumentuma igaz, egyébként 0. A felhalmozott hozam mennyiségét felírhatjuk a τ_i ($i \in S$) idők segítségével is:

$$Y(T) = \sum_{i \in S} r_i \tau_i.$$

Amiből a felhalmozott hozam várható értéke

$$\mathbf{E}(Y(T)) = \mathbf{E}\left(\sum_{i \in S} r_i \tau_i\right) = \sum_{i \in S} r_i \mathbf{E}(\tau_i) ,$$

ahol

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\tau_i) &= \mathbf{E}\left(\int_0^T I(X(t) = i) dt\right) = \int_{t=0}^T \mathbf{E}(I(X(t) = i)) dt = \\ &= \int_{t=0}^T \Pr(X(t) = i) dt = \int_0^T p_i(t) dt . \end{aligned}$$

Így az állapot valószínűség vektor és a hozamráta vektor alapján

$$\mathbf{E}(Y(T)) = \int_0^T \underline{p}(t) dt \underline{r}^T .$$

Markovi rendszer esetén, amely \underline{p}_0 kezdeti eloszlás vektorral, $\mathbf{\Pi}(t)$ átmenetvalószínűség- és \mathbf{Q} generátormátrix-al jellemezhető

$$\mathbf{E}(Y(T)) = \underline{p}_0 \int_0^T \mathbf{\Pi}(t) dt \underline{r}^T = \underline{p}_0 \int_0^T e^{\mathbf{Q}t} dt \underline{r}^T .$$

Az állapot valószínűség és annak integrálja a kumulált állapotvalószínűség számítása egyszerű, így a felhalmozott hozam várható értéke is könnyen számítható.

3.5.2. A felhalmozott rátáhozam második momentuma

Ismét a

$$Y(T) = \sum_{i \in S} r_i \tau_i$$

kifejezésből indulva

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(Y^2(T)) &= \mathbf{E}\left(\left[\sum_{i \in S} r_i \tau_i\right]^2\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{i \in S} (r_i \tau_i)^2 + \sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} r_i \tau_i r_j \tau_j\right) = \\ &= \mathbf{E}\left(\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} r_i \tau_i r_j \tau_j\right) = \sum_{i \in S} \sum_{j \in S} r_i r_j \mathbf{E}(\tau_i \tau_j) . \end{aligned}$$

Tekintsük a $\mathbf{E}(\tau_i \tau_j)$ mennyiséget:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\tau_i \tau_j) &= \mathbf{E}\left(\int_{t=0}^T I(X(t) = i) dt \int_{s=0}^T I(X(s) = j) ds\right) = \\
&\mathbf{E}\left(\int_{t=0}^T \int_{s=0}^T I(X(t) = i)I(X(s) = j) ds dt\right) = \\
&\mathbf{E}\left(\int_{t=0}^T \int_{s=0}^T I(X(t) = i, X(s) = j) ds dt\right) = \\
&\int_{t=0}^T \int_{s=0}^T \mathbf{E}(I(X(t) = i, X(s) = j)) ds dt = \\
&\int_{t=0}^T \int_{s=0}^T \Pr(X(t) = i, X(s) = j) ds dt = \\
&\int_{t=0}^T \int_{s=0}^t \Pr(X(t) = i, X(s) = j) ds dt + \int_{t=0}^T \int_{s=t}^T \Pr(X(t) = i, X(s) = j) ds dt \\
&\int_{t=0}^T \int_{s=0}^t \Pr(X(s) = j) \Pr(X(t) = i|X(s) = j) ds dt + \\
&\quad \int_{t=0}^T \int_{s=t}^T \Pr(X(t) = i) \Pr(X(s) = j|X(t) = i) ds dt \\
&\int_{t=0}^T \int_{s=0}^t p_j(s)\Pi_{ji}(t-s) ds dt + \int_{t=0}^T \int_{s=t}^T p_i(t)\Pi_{ij}(s-t) ds dt
\end{aligned}$$

Amiből látható, hogy a második momentum számításához összetett konvolúciós integrált kell kiértékelni.

3.5.3. A felhalmozott impulzus- és rátahozam átlaga

A $(0, T)$ intervallumon az i állapotból j állapotba történő átlépések számát jelölje N_{ij} (v.v.):

$$N_{ij} = \int_{t=0}^T \delta_t I(X(t^-) = i, X(t^+) = j) dt ,$$

A felhalmozott hozam mennyiségét felírhatjuk a τ_i idők és az N_{ij} átlépésszámok segítségével is:

$$Y(T) = \sum_{i \in S} r_i \tau_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} N_{ij} \mathcal{D}_{ij}.$$

Amiből a felhalmozott hozam várható értéke N_{ij} és \mathcal{D}_{ij} függetlensége miatt

$$\mathbf{E}(Y(T)) = \mathbf{E}\left(\sum_{i \in S} r_i \tau_i + \sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} \sum_{k=1}^{N_{ij}} \mathcal{D}_{ij}\right) = \sum_{i \in S} r_i \mathbf{E}(\tau_i) + \sum_{i \in S} \sum_{j \in S, j \neq i} \mathbf{E}(N_{ij}) \mathbf{E}(\mathcal{D}_{ij}).$$

Ebben a kifejezésben az egyetlen ismeretlen mennyiség, $\mathbf{E}(N_{ij})$, meghatározása érdekében osszuk fel apró Δ hosszúságú intervallumokra a vizsgált $(0, T)$ intervallumot, és számoljuk össze, hogy ezen kis intervallumokon hányszor következik be az átlépés i -ből j -be.

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(N_{ij}) &= \mathbf{E}\left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{T/\Delta-1} I(X(k\Delta) = i, X((k+1)\Delta) = j)\right) = \\
&\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{T/\Delta-1} \mathbf{E}(I(X(k\Delta) = i, X((k+1)\Delta) = j)) = \\
&\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{T/\Delta-1} \Pr(X(k\Delta) = i, X((k+1)\Delta) = j) = \\
&\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{T/\Delta-1} \Pr(X(k\Delta) = i) \Pr(X((k+1)\Delta) = j \mid X(k\Delta) = i) = \\
&\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{T/\Delta-1} p_i(k\Delta)(q_{ij}\Delta + \sigma(\Delta)) = \\
&q_{ij} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{T/\Delta-1} p_i(k\Delta) \Delta + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{T/\Delta-1} \sigma(\Delta) = \\
&q_{ij} \int_{t=0}^T p_i(t) dt + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{T}{\Delta} \sigma(\Delta) = q_{ij} \int_{t=0}^T p_i(t) dt
\end{aligned}$$

Aminek felhasználásával végeredményül azt kapjuk, hogy:

$$\mathbf{E}(Y(T)) = \sum_{i \in S} \left(r_i + \sum_{j \in S, j \neq i} q_{ij} \mathbf{E}(\mathcal{D}_{ij}) \right) \int_0^T p_i(t) dt .$$

A. Függelék

A Laplace és Laplace-Stieltjes transzformáltak néhány tulajdonsága

Az $F(t)$ függvény Laplace transzformáltja definíció szerint

$$F^*(s) = \int_{0^-}^{\infty} F(t)e^{-st} dt ,$$

míg Laplace-Stieltjes transzformáltja

$$F^\sim(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dF(t) .$$

A transzformált függvények kapcsolata igen egyszerű

$$F^\sim(s) = s F^*(s) ,$$

ez alapján azonban még nem látható közvetlenül az Laplace és a Laplace-Stieltjes transzformált párok kapcsolata, amit az alábbi táblázatba foglaltunk össze.

"idő" tartomány	Laplace transzformált	Laplace-Stieltjes tr.
$F(t), t \geq 0$	$F^*(s) = \int_{0^-}^{\infty} F(t)e^{-st} dt$	$F^\sim(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dF(t)$
$aF(t) + bG(t)$	$aF^*(s) + bG^*(s)$	$aF^\sim(s) + bG^\sim(s)$
$F(t/a) \quad a > 0$	$aF^*(as)$	$F^\sim(as)$
$F(t-a) \quad a > 0$	$e^{-as} F^*(s)$	$e^{-as} F^\sim(s)$
$\int_{0^-}^t F(\tau) G(t-\tau) d\tau$	$F^*(s) G^*(s)$	$\frac{1}{s} F^\sim(s) G^\sim(s)$
$\int_{0^-}^t G(t-\tau) dF(\tau)$	$sF^*(s) G^*(s)$	$F^\sim(s) G^\sim(s)$
$\frac{dF(t)}{dt}$	$sF^*(s) - F(0)$	$s[F^\sim(s) - F(0)]$
$\int_{0^-}^{\infty} F(t) dt$	$\lim_{s \rightarrow 0} F^*(s)$	$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} F^\sim(s)$
$\int_{0^-}^{\infty} dF(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} F(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF^*(s)$	$\lim_{s \rightarrow 0} F^\sim(s)$
$\lim_{t \rightarrow 0} F(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF^*(s)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} F^\sim(s)$

Végül nézzük néhány nevezetes függvény transzformáltjait:

"idő" tartomány	Laplace transzformált	Laplace-Stieltjes tr.
$F(t), t \geq 0$	$F^*(s) = \int_{0^-}^{\infty} F(t)e^{-st} dt$	$F^{\sim}(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st} dF(t)$
$U(t)$	$\frac{1}{s}$	1
$U(t - a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	e^{-as}
$\delta(t)$	1	s
$\delta(t - a)$	e^{-as}	$s e^{-as}$
$b e^{-at}$	$\frac{b}{s + a}$	$\frac{b s}{s + a}$
$1 - e^{-at}$	$\frac{a}{s(s + a)}$	$\frac{a}{s + a}$

A táblázatban $U(t)$ jelöli az egységugrás függvényt és $\delta(t)$ az egységimpulzus vagy más néven a Dirac delta függvényt.

B. Függelék

Deriválási szabályok

Az alábbi deriválási szabályok az integrál és differenciál egyenletek kapcsolatának elemzésénél alkalmazhatók.

a)

$$\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(x) dx \right)' = f(b(x)) b'(x) - f(a(x)) a'(x),$$

b)

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, h) dh = b'(x) f(x, b(x)) - a'(x) f(x, a(x)) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x, h) dh.$$

Indoklás:

a)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x) dx &= \frac{d}{dx} \left| F(h) \right|_{h=a(x)}^{h=b(x)} = \\ &= \frac{d}{dx} \left(F(b(x)) - F(a(x)) \right) = f(b(x)) b'(x) - f(a(x)) a'(x), \end{aligned}$$

ahol $\frac{d}{dx} F(x) = f(x)$.

b)

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_{a(x)}^{b(x)} f(x, h) dh = \frac{d}{dx} \left| F(x, h) \right|_{h=a(x)}^{h=b(x)} = \frac{d}{dx} \left(F(x, b(x)) - F(x, a(x)) \right),$$

ahol $\frac{\partial}{\partial h} F(x, h) = f(x, h)$ és

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} F(x, b(x)) &= \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta, b(x+\Delta)) - F(x, b(x))}{\Delta} = \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left(\frac{F(x+\Delta, b(x+\Delta)) - F(x+\Delta, b(x))}{\Delta} + \frac{F(x+\Delta, b(x)) - F(x, b(x))}{\Delta} \right) &= \\ \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{F(x+\Delta, b(x) + \Delta b'(x) + \sigma(\Delta)) - F(x+\Delta, b(x))}{\Delta} + \frac{\partial}{\partial x} F(x, h) \Big|_{h=b(x)} &= \\ b'(x) \frac{\partial}{\partial h} F(x, h) \Big|_{h=b(x)} + \frac{\partial}{\partial x} F(x, h) \Big|_{h=b(x)} &= \\ b'(x) f(x, b(x)) + \frac{\partial}{\partial x} F(x, h) \Big|_{h=b(x)}. \end{aligned}$$

Irodalomjegyzék

- [1] E. Cinlar. *Introduction to Stochastic Processes*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1975.
- [2] L. Györfi, I. Páli. *Tömegkiszolgálás informatikai rendszerekben*. Műegyetemi Kiadó, Budapest, 1996.
- [3] D.R. Cox. The analysis of non-markovian stochastic processes by the inclusion of supplementary variables. *Proceedings of the Cambridge Phylosophical Society*, 51:433–440, 1955.
- [4] R.A. Howard. *Dynamic Probabilistic Systems, Volume II: Semi-Markov and Decision Processes*. John Wiley and Sons, New York, 1971.
- [5] L. Kleinrock. *Sorbanállás kiszolgálás*. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.
- [6] V. G. Kulkarni. *Modeling and Analysis of Stochastic Systems*. Chapman & Hall, 1995.