

Sorbanállási hálózatok  
rövid összefoglaló

Telek Miklós

2010

# 1. fejezet

## Sorbanállási hálózatok

### 1.1. Sorbanállási hálózatok bevezetése

Az eddigiekben egy tömegkiszolgálási rendszer elemzésére vonatkozó módszereket tekintettünk át. A távközlő hálózatok vagy összefüggő feladatokat elvégző rendszerek, például számítógép rendszerek, elemzése során azonban olyan modelleket szoktak alkalmazni, amelyekben több kiszolgálóegység van és az igények ezek között a kiszolgáló egységek között vándorolnak. Az ilyen rendszerek modellezésére használják a sorbanállási hálózat modelleket. A sorbanállási hálózatok olyan gráf modellek, amelyeknek csomópontjaiban az eddig tárgyalt sorbanállási rendszerek valamelyike található, és élei határozzák meg, hogy az igények hogyan mozognak a csomópontok között. A igények továbbítása emlékezetmentes, azaz egy csomóponton kiszolgálást nyert igény az előzményektől és a sorokban lévő igények számától függetlenül az adott csomópontból kimenő élre jellemző valószínűséggel kerül továbbításra.

A sorbanállási hálózatoknak két fő osztályát különböztetjük meg, a nyílt és a zárt sorbanállási hálózatok osztályát. A zárt sorbanállási hálózatokban az igények száma állandó. Igények nem keletkeznek és nem távoznak a rendszerből, csak a kiszolgálók között vándorolnak. A nyílt sorbanállási hálózatokba igények érkehetnek a külvilágból és igények távozhatnak a külvilág felé.

A sorbanállási hálózatokat megkülönböztethetjük a szerint is, hogy van-e bennük visszacsatolás vagy nincs. Az előbbi esetben visszacsatolt, az utóbbi esetben előre csatolt hálózatról beszélünk. Egy hálózat akkor előre csatolt, ha a csomópontjai sorba rendezhetőek úgy, hogy minden igény egy csomópont elhagyása után egy nagyobb sorszámú csomópontba, vagy a külvilágba megy.

### 1.2. Burke tétel

A nyílt előre csatolt sorbanállási hálózatok elemzése elvégezhető az alábbi szemléletes eredmény alapján.

**1.1. tétel.** [2] *Stabil  $M/M/m$  sor kimeneti folyamata Poisson folyamat az érkezési folyamat paraméterével.*

*Bizonyítás.* Az  $M/M/1$  sorban lévő felhasználók száma *reverzibilis* Markov lánc **??**. Az időben megfordított folyamat megegyezik az eredetivel, így a megfordított folyamat távozási pillanatai az eredeti folyamat érkezési pillanatainak felelnek meg, ami egy Poisson folyamat.

□

A tétel egy következménye, hogy egyensúlyi állapotban a következő érkezésig eltelő idő exponenciális eloszlású. Legyen  $D^*(s)$  a következő távozási időpont sűrűségfüggvényének Laplace transzformáltja,  $A^*(s)$  az érkezési időközök sűrűségfüggvényének Laplace transzformáltja,  $B^*(s)$  a kiszolgálási idő sűrűségfüggvényének Laplace transzformáltja és  $p$  annak valószínűsége, hogy egy véletlen pillanatban nem üres a rendszer, ekkor

$$D^*(s) = p B^*(s) + (1 - p) A^*(s) B^*(s).$$

Felhasználva, hogy  $B^*(s) = \frac{\mu}{s+\mu}$ ,  $A^*(s) = \frac{\lambda}{s+\lambda}$ ,  $p = \frac{\lambda}{\mu}$  az kapjuk, hogy

$$D^*(s) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\mu}{s+\mu} + \frac{\mu-\lambda}{\mu} \frac{\lambda}{s+\lambda} \frac{\mu}{s+\mu},$$

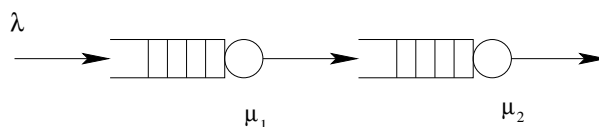
majd ennek átalakításával

$$D^*(s) = \frac{\mu}{s+\mu} \frac{s\lambda + \lambda^2 + \mu\lambda - \lambda^2}{\mu(s+\lambda)} = \frac{\lambda}{s+\lambda}.$$

Ez az összefüggés azt szemlélteti, hogy Markovi sorbanállási rendszerekben több esetben is exponenciális eloszlást tapasztalunk.

### 1.3. Két sorból álló tandem hálózat

A legegyszerűbb sorbanállási hálózat a két sorbakapcsolt  $M/M/1$ -es sorbanállási rendszerből álló hálózat, amelybe az igények a külvilágból az első sorhoz érkeznek, majd ha itt kiszolgálást nyertek, akkor beállnak a második sorba és második sorban kapott kiszolgálás után eltávoznak a rendszerből. Legyen az érkezési intenzitás  $\lambda$  és a kiszolgálási intenzitások rendre  $\mu_1$  és  $\mu_2$ .



1.1. ábra. Tandem hálózat

A Burke tétel alapján látható, hogy mindkét sor bemeneti intenzitása  $\lambda$ , és így a stabilitás feltétele

$$\frac{\lambda}{\mu_1} < 1 \quad \frac{\lambda}{\mu_2} < 1$$

azaz

$$\lambda < \min(\mu_1, \mu_2).$$

Tekintsük a sorokban lévő igények számát leíró két elemű vektor folyamatot. Amikor a folyamat állapota  $\{i, j\}$ , akkor az első sorban  $i$  a másodikban  $j$  igény van. Ennek a Markov láncnak az átmeneti intenzitásai a következők

$$\begin{aligned} \{i, j\} &\rightarrow \{i+1, j\} & : & \lambda \\ \{i, j\} &\rightarrow \{i-1, j+1\} & : & \mu_1 \quad \text{ha } i \geq 1 \\ \{i, j\} &\rightarrow \{i, j-1\} & : & \mu_2 \quad \text{ha } j \geq 1 \end{aligned}$$

Legyen  $p_{i,j}$  annak az egyensúlyi valószínűsége, hogy az első sorban  $i$  és a másodikban  $j$  igény van. Az átmenetek alapján az egyensúlyi egyenletek a következők:

$$\begin{cases} \lambda p_{0,0} & = \mu_2 p_{0,1} \\ (\lambda + \mu_2) p_{0,j} & = \mu_1 p_{1,j-1} + \mu_2 p_{0,j+1} & j \geq 1 \\ (\lambda + \mu_1) p_{i,0} & = \lambda p_{i-1,0} + \mu_2 p_{i,1} & i \geq 1 \\ (\lambda + \mu_1 + \mu_2) p_{i,j} & = \lambda p_{i-1,j} + \mu_1 p_{i+1,j-1} + \mu_2 p_{i,j+1} & i, j \geq 1 \end{cases}$$

A Burke tétel azt mondja, hogy egyensúlyban a második sor bemeneti folyamata is  $\lambda$  paraméterű Poisson folyamat. Ez alapján az egyensúlyi eloszlás

$$p_{i,j} = p_i^{(1)} p_j^{(2)} = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_1}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_1}\right)^i \left(1 - \frac{\lambda}{\mu_2}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu_2}\right)^j,$$

ahol  $p_i^{(1)}$  és  $p_j^{(2)}$  a megfelelő M/M/1 sor egyensúlyi eloszlását jelöli.

Az ilyen alakú megoldást szorzat alakú megoldásnak nevezik, mivel az egyensúlyi eloszlás két független M/M/1 sor egyensúlyi eloszlásának szorzataként adódik. Fontos azonban látni, hogy a tandem sorokban lévő igények száma nem független, csak az egyensúlyi eloszlás szorzat alakú.

Az egyensúlyi eloszlás alapján egyszerűen meghatározható több hálózati teljesítményjellemző, például a rendszerben lévő felhasználók számának várható értéke, (a Little szabály felhasználásával) a tandem hálózatban eltöltött idő várható értéke és a tandem hálózatban várakozással eltöltött idő várható értéke.

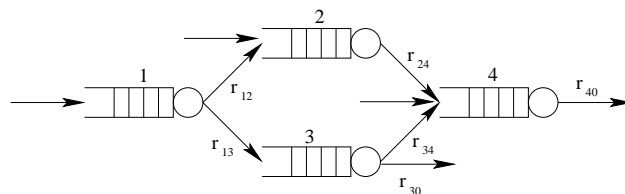
$$\mathbf{E}(N) = \sum_i \sum_j (i + j) p_{i,j} = \sum_i i p_i^{(1)} + \sum_j j p_j^{(2)} = \frac{\frac{\lambda}{\mu_1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu_1}} + \frac{\frac{\lambda}{\mu_2}}{1 - \frac{\lambda}{\mu_2}},$$

$$\mathbf{E}(T) = \frac{\mathbf{E}(N)}{\lambda} = \frac{\frac{1}{\mu_1}}{1 - \frac{\lambda}{\mu_1}} + \frac{\frac{1}{\mu_2}}{1 - \frac{\lambda}{\mu_2}} = \frac{1}{\mu_1 - \lambda} + \frac{1}{\mu_2 - \lambda},$$

$$\mathbf{E}(W) = \mathbf{E}(T) - \frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}.$$

## 1.4. Aciklikus hálózat

Aciklikus sorbanállási hálózatok olyan speciális sorbanállási hálózatok, melyekben (megfelelő csomópont számozás mellett) a sorok kimenő forgalma vagy magasabb indexű csomópont(ok)hoz megy, vagy távozik a rendszerből.



1.2. ábra. Aciklikus hálózat

Értelemszerűen azokat a hálózatokat, amelyekben az igények legalább egyszer vissza tudnak jutni egy előzőleg már meglátogatott csomópontba ciklikus vagy kört tartalmazó hálózatoknak nevezzük.

A Burke tétel, a független Poisson folyamatok összegzésére és a Poisson folyamatok szűrésére vonatkozó eredmények alapján a tandem hálózatnál alkalmazott megközelítés, azaz, hogy minden sor bemeneti folyamata Poisson folyamat, továbbra is alkalmazható marad, és ennek következtében az egyensúlyi eloszlás szorzat alakú

$$p_{k_1, k_2, \dots, k_N} = \prod_{i=1}^N p_{k_i}^{(i)}$$

ahol  $p_{k_i}^{(i)}$  az  $i$ -edik M/M/1-es sor  $k_i$  állapotának valószínűsége annak eredő bemeneti folyamata ( $\lambda_i$  paraméterű Poisson folyamat) és kiszolgálási intenzitása ( $\mu_i$ ) alapján, azaz

$$p_{k_i}^{(i)} = \left(1 - \frac{\lambda_i}{\mu_i}\right) \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i}.$$

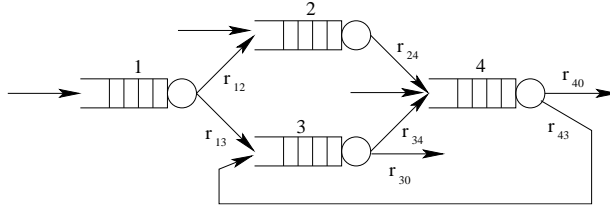
## 1.5. Nyílt, Jackson típusú sorbanállási hálózatok

Az előző esetekben, a visszacsatolás nélküli hálózatokban, a Burke tétel alapján feltételezhetjük, hogy a sorok bemenő folyamatai független Poisson folyamatok, és ennek felhasználásával szorzat alakú megoldáshoz jutottunk. Mostantól azokat az eseteket vizsgáljuk, amikor a Burke tétel már nem alkalmazható a hálózatban lévő visszacsatolás miatt.

A témakör egyik meghatározó eredménye J. R. Jackson nevéhez fűződik [5], aki 1963-ban publikálta az alábbi sorbanállási hálózatokra vonatkozó eredményeket.

- A hálózat  $N$  csomópontot tartalmaz,
- az  $i$ . csomópontban  $m_i$  kiszolgáló egység működik,
- a kiszolgáló egységek kiszolgálási ideje az  $i$ . csomópontban, exponenciális eloszlású,  $\mu_i$  paraméterrel,
- az  $i$ . csomópontba a külvilágból érkező igények érkezési folyamata  $\gamma_i$  paraméterű Poisson folyamat
- Az  $i$ . csomópontban befejezett kiszolgálás után az igény a  $j$ . csomópontba lép át  $r_{i,j}$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$  valószínűséggel, míg a rendszerből való eltávozás valószínűsége:

$$r_{i,0} = 1 - \sum_{k=1}^N r_{i,k} \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$



1.3. ábra. Jackson típusú hálózat

### Jackson típusú sorbanállási hálózat stabilitása

Az egyes csomópontok eredő érkezési intenzitása a következő, u.n. forgalmi egyenletrendszer segítségével határozható meg:

$$\lambda_i = \gamma_i + \sum_{j=1}^N \lambda_j r_{j,i} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.1)$$

Az egyenlet azt írja le, hogy a  $i$ -edik csomópont forgalma a külvilágból érkező és a többi csomópontból  $r_{ij}$  valószínűséggel érkező igényekből áll. Bevezetve a  $\lambda = \{\lambda_i\}$  és  $\gamma = \{\gamma_i\}$  sorvektorokat és az  $\mathbf{R} = \{r_{ij}\}$  mátrixot a forgalmi egyenlet átírható vektoros alakra

$$\lambda = \gamma + \lambda \mathbf{R}$$

ahonnan

$$\lambda = \gamma (\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}$$

ha  $(\mathbf{I} - \mathbf{R})$  nem szinguláris. Az  $(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}$  mátrix elemei fizikai jelentéssel rendelkeznek az alábbi tétel szerint. Jelölje  $L_{ij}$  azt, hogy egy a külvilágból az  $i$ -edik sorba érkező igény hányszor kap kiszolgálást a  $j$ -edik sorban a külvilágba távozás előtt.

#### 1.2. tétel.

$$[(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}]_{i,j} = \mathbf{E}(L_{i,j}),$$

ahol a bal oldal az  $(\mathbf{I} - \mathbf{R})^{-1}$  mátrix  $i, j$  eleme.

*Bizonyítás.* A  $j$ -edik sorba lépések száma kielégíti a következő egyenletet

$$\mathbf{E}(L_{i,j}) = \delta_{i,j} + \sum_{k=1}^N r_{i,k} \mathbf{E}(L_{k,j}),$$

ahol  $\delta_{i,j}$  a Kronecker delta jele.  $\delta_{i,j} = 1$  ha  $i = j$ , különben 0. Bevezetve az  $\mathbf{E}(L_{i,j})$  elemekből képzett  $\mathbf{L}$  mátrixot a fenti összefüggést mátrixos alakba írhatjuk,

$$\mathbf{L} = \mathbf{I} + \mathbf{R}\mathbf{L},$$

amiből következik az állítás. □

A tétel következménye, hogy ha  $(\mathbf{I} - \mathbf{R})$  nem szinguláris, akkor minden igény véges várható értékű lépés után elhagyja a rendszert.

A sorbanállási hálózat akkor stabil, ha minden sora stabil. Ennek feltétele:

$$\lambda_i < m_i \mu_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

## Jackson típusú sorbanállási hálózat egyensúlyi eloszlása

A felsorolt feltételek mellett a sorbanállási hálózat egyes soraiban lévő felhasználók száma egy Markov lánc. Jelölje  $k_i$  az  $i$ -edik sorban lévő felhasználók számát és vezessük be a következő jelöléseket

$$\begin{aligned}\mathbf{N} &= (k_1, \dots, k_i, \dots, k_j, \dots, k_N) \\ \mathbf{N}_{i,0} &= (k_1, \dots, k_i + 1, \dots, k_j, \dots, k_N) \\ \mathbf{N}_{0,j} &= (k_1, \dots, k_i, \dots, k_j - 1, \dots, k_N) \\ \mathbf{N}_{i,j} &= (k_1, \dots, k_i + 1, \dots, k_j - 1, \dots, k_N)\end{aligned}$$

ahol az utóbbi két esetben  $k_j \geq 1$ . Ezeknek a jelöléseknek a segítségével a Markov lánc lehetséges állapot átmenetei a következők:

- $\mathbf{N}_{0,j} \rightarrow \mathbf{N}$ :  
egy igény érkezik kívülről a  $j$ . csomópontba  $\gamma_j$  intenzitással, és ezzel megnő a csomópontban az igények száma  $k_j - 1$ -ről  $k_j$ -re,
- $\mathbf{N}_{i,0} \rightarrow \mathbf{N}$ :  
egy igény távozik a hálózaton kívülre az  $i$ . csomópontból  $r_{i,0}\alpha_i(k_i + 1)\mu_i$  intenzitással, és ezzel lecsökken az igények száma  $k_i + 1$ -ről  $k_i$ -re,
- $\mathbf{N}_{i,j} \rightarrow \mathbf{N}$ :  
egy igény távozik az  $i$ . csomópontból és átmegy a  $j$ . csomópontba  $r_{i,j}\alpha_i(k_i + 1)\mu_i$  intenzitással, és ezzel egyrészt lecsökken az igények száma az  $i$ . csomópontban  $k_i + 1$ -ről  $k_i$ -re, másrészt megnő az igények száma a  $j$ . csomópontban  $k_j - 1$ -ről  $k_j$ -re,

ahol  $\alpha_i(k_i) = \min\{k_i, m_i\}$  megadja, hogy  $k_i$  felhasználó esetén hány kiszolgáló dolgozik az  $i$ . csomópontban.

**1.3. tétel.** *A felsorolt állapotátmenetekkel rendelkező Markov lánc egyensúlyi eloszlása a stabilitási feltétel teljesülése esetén szorzat alakú, azaz*

$$p_{\mathbf{N}} = p_{k_1, \dots, k_N} = p_{k_1}^{(1)} p_{k_2}^{(2)} \cdots p_{k_N}^{(N)} \quad (1.2)$$

ahol  $p_{k_i}^{(i)}$  az  $\lambda_i$  érkezési intenzitású  $\mu_i$  kiszolgálási intenzitású  $M/M/m_i$  sor egyensúlyi eloszlása

$$p_{k_i}^{(i)} = \begin{cases} p_0^{(i)} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i} \frac{1}{k_i!} & 0 \leq k_i \leq m_i \\ p_0^{(i)} \left(\frac{\lambda_i}{\mu_i}\right)^{k_i} \frac{1}{m_i!} m_i^{m_i - k_i} & k_i \geq m_i \end{cases} \quad (1.3)$$

és  $p_0^{(i)}$  meghatározható a  $\sum_{k_i=0}^{\infty} p_{k_i}^{(i)} = 1$  normalizáló egyenletből.

*Bizonyítás.* A Markov lánc lehetséges állapotátmenetei alapján az  $\mathbf{N}$  állapotra vonatkozó az egyensúlyi egyenlet a következő

$$\begin{aligned} p_{\mathbf{N}} \left( \sum_{i=1}^N \gamma_i + \sum_{i=1}^N \alpha_i(k_i) \mu_i \right) &= \sum_{i=1}^N p_{\mathbf{N}_{i,0}} \alpha_i(k_i + 1) \mu_i r_{i,0} + \\ &+ \sum_{j=1}^N p_{\mathbf{N}_{0,j}} \gamma_j I_{k_j > 0} + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{\mathbf{N}_{i,j}} \alpha_i(k_i + 1) \mu_i r_{i,j}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

ahol  $I_{k_j > 0}$  a  $k_j > 0$  esemény indikátora.

Az egyenlet bal oldalán az  $\mathbf{N}$  állapot elhagyásának intenzitása áll. Ez tartalmazza egy új igények érkezése és egy igénykiszolgálás befejezése miatt bekövetkező állapot átmeneteket. Az egyenlet jobb oldalán az  $\mathbf{N}$  állapotba lépés intenzitása áll. Ez tartalmazza az igény távozás a hálózaton kívülre, a új igény érkezése a hálózaton kívülről és a kiszolgált igény átmegy egy másik sorba típusú átmeneteket.

$\gamma_i > 0$ ,  $\mu_i > 0$  feltételek esetén a Markov lánc irreducibilis, és az egyensúlyi egyenletrendszer megoldása egyértelmű. Így elegendő azt megmutatnunk, hogy a szorzat alakú megoldás (1.2) kielégíti az egyensúlyi egyenletet (1.4). Először behelyettesítjük a szorzat alakú megoldást az egyensúlyi egyenletet jobb oldalába és kihasználjuk, hogy (1.3) alapján  $p_{k_i+1}^{(i)} = p_{k_i}^{(i)} \frac{\lambda_i}{\mu_i \alpha_i(k_i+1)}$  valamint  $p_{k_i-1}^{(i)} = p_{k_i}^{(i)} \frac{\mu_i \alpha_i(k_i)}{\lambda_i}$ . Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^N p_{k_1}^{(1)} \cdots p_{k_i+1}^{(i)} \cdots p_{k_N}^{(N)} \alpha_i(k_i+1) \mu_i r_{i,0} + \\
& \sum_{j=1}^N p_{k_1}^{(1)} \cdots p_{k_j-1}^{(j)} \cdots p_{k_N}^{(N)} \gamma_j I_{k_j > 0} + \\
& \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{k_1}^{(1)} \cdots p_{k_i+1}^{(i)} \cdots p_{k_j-1}^{(j)} \cdots p_{k_N}^{(N)} \alpha_i(k_i+1) \mu_i r_{i,j} = \\
& p_{k_1}^{(1)} \cdots p_{k_N}^{(N)} \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i r_{i,0} + \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j \alpha_j(k_j)}{\lambda_j} \gamma_j + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j \alpha_j(k_j)}{\lambda_j} \lambda_i r_{i,j} \right) = \\
& p_{k_1}^{(1)} \cdots p_{k_N}^{(N)} \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i r_{i,0} + \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j \alpha_j(k_j)}{\lambda_j} \gamma_j + \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j \alpha_j(k_j)}{\lambda_j} \underbrace{\sum_{i=1}^N \lambda_i r_{i,j}}_{\lambda_j - \gamma_j} \right) = \\
& p_{k_1}^{(1)} \cdots p_{k_N}^{(N)} \left( \sum_{i=1}^N \lambda_i r_{i,0} + \sum_{j=1}^N \mu_j \alpha_j(k_j) \right) = \\
& p_{k_1}^{(1)} \cdots p_{k_N}^{(N)} \left( \sum_{i=1}^N \gamma_i + \sum_{j=1}^N \mu_j \alpha_j(k_j) \right).
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Itt a harmadik lépésben a  $j$ -edik sorra vonatkozó forgalmi egyenletet, (1.1) alkalmaztuk és a negyedik lépésben kihasználtuk, hogy az egyensúlyi állapotban a külvilágból érkező igényintenzitás,  $\sum_{i=1}^N \gamma_i$  és a külvilágba távozó igényintenzitás,  $\sum_{i=1}^N \lambda_i r_{i,0}$  megegyezik. A kapott végső kifejezés az egyensúlyi egyenlet bal oldala a szorzat alakú megoldás behelyettesítésével.  $\square$

A Jackson típusú sorbanállási hálózat ciklikus, ennek következtében az egyes csomópontok eredő érkezési folyamata nem Poisson, így elemzésére a Burke tétel nem alkalmazható. Ebben az esetben tehát annak ellenére, hogy a csomópontok viselkedése összefüggő az egyensúlyi eloszlás szorzat alakú. Fontos megjegyezni, hogy a fordított irányú következtetés nem igaz. A szorzat alakú egyensúlyi viselkedésből nem következik a sorok függetlensége.



## Forgalmi tétel nyílt sorbanállási hálózatokra

A Poisson érkezési folyamattal rendelkező sorbanállási rendszerek PASTA tulajdonságához hasonló tulajdonság tapasztalható a nyílt sorbanállási hálózatokban is.

**1.4. tétel.** *A sorbanállási hálózat soraiban lévő felhasználók száma a  $j$ -edik sor igényérkezési pillanataiban megegyezik az egyensúlyi eloszlással.*

*Bizonyítás.* Egészítsük ki a vizsgált sorbanállási hálózatot egy 0-adik sorral, úgy hogy minden  $j$ -edik sorba menő igényt a 0-adik sorba vezetünk és a 0-adik sorból távozó igények a  $j$ -edik sorba mennek. A módosított sorbanállási hálózat is Jackson típusú és így szorzat alakú egyensúlyi eloszlással rendelkezik,  $p_{\mathbf{N}'} = p_{k_0}^{(0)} p_{k_1}^{(1)} p_{k_2}^{(2)} \cdots p_{k_N}^{(N)}$ .

A 0-adik sor kiszolgálási intenzitása  $\mu_0$ .  $\mu_0 \rightarrow \infty$  esetén a módosított és az eredeti sorbanállási hálózat viselkedése megegyezik és a  $j$ -edik sor igényérkezési pillanatainak azok a pillanatok, amikor 1 igény van a 0-adik sorban. Így

$$\mathbf{P}(K_1 = k_1, \dots, K_N = k_N | K_0 = 1) = \frac{\mathbf{P}(K_0 = 1, K_1 = k_1, \dots, K_N = k_N)}{\mathbf{P}(K_0 = 1)} = p_{\mathbf{N}}$$

□

## 1.6. Zárt, Gordon-Newell típusú sorbanállási hálózatok

A Jackson típusú sorbanállási hálózatokhoz hasonló, de zárt sorbanállási hálózatok vizsgálatát a Gordon-Newell szerzőpáros publikálta [4]. A hálózat csomópontjainak működése megegyezik a Jackson típusú sorbanállási hálózat csomópontjainak működésével. Végtelen buffer és  $m_i$  darab  $\mu_i$  intenzitású kiszolgáló áll rendelkezésre az  $i$ -edik csomópontban. Azonban a zárt sorbanállási hálózatokba nem érkezik igény a külvilágból és nem távozik igény a külvilágba. Jelölje  $K$  a folyamat kezdetén a hálózatban lévő igények számát. Mivel a hálózatban lévő igények száma állandó így minden állapotra teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^N k_i = K ,$$

ahol  $k_i$  jelöli az  $i$ -edik sorban lévő felhasználók számát.

Az állapotok közti egyetlen lehetséges állapotátmenet az  $\mathbf{N}_{i,j} \rightarrow \mathbf{N}$  állapotátmenet, azaz, hogy egy igény távozik az  $i$ . csomópontból a  $j$ . csomópontba  $\alpha_i(k_i + 1)\mu_i r_{i,j}$  intenzitással, és ezzel egyrészt lecsökken az igények száma az  $i$ . csomópontban  $k_i + 1$ -ről  $k_i$ -re, másrészt megnő az igények száma a  $j$ . csomópontban  $k_j - 1$ -ről  $k_j$ -re,

Az egyes csomópontok eredő érkezési intenzitása a következő, u.n. forgalmi egyenletrendszer segítségével határozható meg:

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^N \lambda_j r_{j,i} \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1.6)$$

Az egyenlet azt írja le, hogy a  $i$ -edik csomópont forgalma a többi csomópontból  $r_{ij}$  valószínűséggel érkező igényekből áll. Zárt sorbanállási hálózatban  $\sum_{j=1}^N r_{ij} = 1$ . Fontos megjegyezni, hogy a zárt sorbanállási rendszerek forgalmi egyenletének nem egyértelmű a megoldása. Egy tetszőleges megoldás konstans szorosa is megoldja az egyenletet.

A felsorolt feltételek mellett a sorbanállási hálózat egyes soraiban lévő felhasználók száma egy Markov lánc.

**1.5. tétel.** A Gordon-Newell típusú sorbanállási hálózatot leíró Markov lánc egyensúlyi eloszlása szorzat alakú, azaz

$$p_{\mathbf{N}} = p_{k_1, \dots, k_N} = \frac{1}{G} \prod_{i=1}^N h_{k_i}^{(i)} \quad (1.7)$$

ahol  $\lambda_i$  a forgalmi egyenlet egy tetszőleges megoldása,

$$h_{k_i}^{(i)} = \begin{cases} \left( \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{k_i} \frac{1}{k_i!} & 0 \leq k_i \leq m_i \\ \left( \frac{\lambda_i}{\mu_i} \right)^{k_i} \frac{1}{m_i!} m_i^{m_i - k_i} & k_i \geq m_i \end{cases} \quad (1.8)$$

és  $G = \sum_{\mathbf{N}} \prod_{i=1}^N h_{k_i}^{(i)}$ .

*Bizonyítás.* A bizonyítás menete hasonló a nyílt hálózatokra vonatkozó tétel bizonyításához. Az egyensúlyi egyenlet az  $\mathbf{N}$  állapotra

$$p_{\mathbf{N}} \left( \sum_{i=1}^N \alpha_i(k_i) \mu_i \right) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{\mathbf{N}_{i,j}} \alpha_i(k_i + 1) \mu_i r_{i,j}, \quad (1.9)$$

ahol az egyenlet bal oldala az  $\mathbf{N}$  állapotból való kilépési intenzitás és jobb oldala az  $\mathbf{N}$  állapotba belépési intenzitás. Markov lánc irreducibilitása miatt itt is megelégszünk annak megmutatásával, hogy a szorzat alakú megoldás kielégíti az egyensúlyi egyenletet.

Az egyenlet jobb oldalába a szorzat alakú megoldást behelyettesítve az kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N p_{k_1}^{(1)} \cdots p_{k_{i+1}}^{(i)} \cdots p_{k_{j-1}}^{(j)} \cdots p_{k_N}^{(N)} \alpha_i(k_i + 1) \mu_i r_{i,j} = \\ & p_{k_1}^{(1)} \cdots p_{k_N}^{(N)} \left( \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j \alpha_j(k_j)}{\lambda_j} \lambda_i r_{i,j} \right) = \\ & p_{k_1}^{(1)} \cdots p_{k_N}^{(N)} \left( \sum_{j=1}^N \frac{\mu_j \alpha_j(k_j)}{\lambda_j} \underbrace{\sum_{i=1}^N \lambda_i r_{i,j}}_{\lambda_j} \right) = \\ & p_{k_1}^{(1)} \cdots p_{k_N}^{(N)} \left( \sum_{j=1}^N \mu_j \alpha_j(k_j) \right), \end{aligned} \quad (1.10)$$

ami megegyezik az egyensúlyi egyenlet bal oldalával a szorzat alakú megoldás behelyettesítése után. A kapott szorzat alakú megoldás normalitását a  $G$  normalizáló konstans biztosítja.  $\square$

A zárt hálózatok számításának két fő problémája, hogy a forgalmi egyenlet megoldása nem egyértelmű, és hogy a normalizáló konstans nem számítható az egyes sorokra külön-külön, hanem csak az egész rendszerre együttesen, ami már egyszerű sorok esetén is nagy számításigényű feladat.  $N$  sort és  $K$  igényt tartalmazó hálózat állapotainak száma  $\binom{N+K-1}{K}$  (pl.  $N = 10, K = 25$  esetén 52 451 256 állapot).

Az első probléma egy gyakran alkalmazott megoldása  $\lambda_1 = 1$  feltételezése. Ezzel a feltételezéssel a forgalmi egyenlet megoldása már egyértelmű. A második problémával, a  $G$  normalizáló konstans számításával sok cikk foglalkozik. Megoldására több gyakorlatban elterjed numerikus módszert alkalmaznak. Ezek közül mi a konvolúciós algoritmust [3] és a MVA (mean value analysis) algoritmust [6] ismertetjük.

## Konvolúciós algoritmus

Az eljárást először publikáló Buzen cikkben [3] egy kiszolgáló volt minden csomópontban, mi azonban az Gordon-Newel hálózatok definíciójának megfelelő esetet tárgyaljuk, ahol  $m_i$  kiszolgáló van az  $i$ -edik csomópontban.

Feltételezve, hogy a sorok száma  $n$  és a felhasználók száma  $k$  legyen

$$g(k, n) = \sum_{(k_1, \dots, k_n), \sum_j k_j = k} \prod_{i=1}^n h_{k_i}^{(i)},$$

és  $g(0, n) = 1$ .  $g(k, n)$  ismeretében a keresett normalizációs konstans  $G = \sum_{\mathbf{N}} \prod_{i=1}^N h_{k_i}^{(i)} = g(K, N)$ .

$g(k, n)$  meghatározására a következő rekurzív összefüggést használhatjuk

$$g(k, n) = \begin{cases} h_k^{(1)} & \text{ha } n = 1, \\ \sum_{j=0}^k h_j^{(n)} g(k-j, n-1) & \text{ha } n > 1. \end{cases} \quad (1.11)$$

A rekurzív összefüggés 1 sor és  $k$  felhasználó esetén értelemszerűen a  $h_k^{(1)}$  eredményt adja. Több sor esetén pedig

$$\begin{aligned} g(k, n) &= \sum_{(k_1, \dots, k_n), \sum_j k_j = k} \prod_{i=1}^n h_{k_i}^{(i)} = \\ &= \sum_{(k_1, \dots, k_n), \sum_j k_j = k, k_n = 0} h_0^{(n)} \prod_{i=1}^{n-1} h_{k_i}^{(i)} + \dots + \sum_{(k_1, \dots, k_n), \sum_j k_j = k, k_n = k} h_k^{(n)} \prod_{i=1}^{n-1} h_{k_i}^{(i)} = \\ &= h_0^{(n)} g(k, n-1) + \dots + h_k^{(n)} g(0, n-1) \end{aligned}$$

kifejezés segítségével visszavezeti a konstans meghatározását az első  $n-1$  sort tartalmazó sorbanállási hálózat vizsgálatára. A normalizáló konstans (1.11) alapján történő számításának komplexitása  $O(NK^2)$  és memória igénye  $O(K)$ .

A konvolúciós algoritmus másik előnye, hogy bizonyos teljesítmény jellemzők közvetlenül meghatározhatók a  $g(k, n)$  paraméterek segítségével. Például annak valószínűsége, hogy az  $\ell$ -edik sorban  $k$  felhasználó van

$$\mathbf{P}(k_\ell = k) = \sum_{(k_1, \dots, k_n), \sum_j k_j = K, k_\ell = k} \frac{1}{G} \prod_{i=1}^n h_{k_i}^{(i)} = h_k^{(\ell)} \frac{g(K-k, N-1)}{g(K, N)},$$

és ez alapján az  $\ell$ -edik sor kihasználtsága

$$U_\ell = 1 - \mathbf{P}(k_\ell = 0) = 1 - \frac{g(K, N-1)}{g(K, N)}.$$

## Forgalmi tétel zárt sorbanállási hálózatokra

A MVA algoritmus a zárt sorbanállási hálózatokra vonatkozó forgalmi tételre épül, így ezt mondjuk ki először.

**1.6. tétel.** A  $K$  felhasználót tartalmazó zárt sorbanállási hálózat soraiban lévő felhasználók száma a  $j$ -edik sor igényérkezési pillanataiban megegyezik a  $K - 1$  felhasználót tartalmazó zárt sorbanállási hálózat egyensúlyi eloszlásával.

*Bizonyítás.* A bizonyítás gyarkorlatilag megegyezik a nyílt sorbanállási hálózatokra vonatkozó tétel bizonyításával. Egészítsük ki a vizsgált sorbanállási hálózatot egy 0-adik sorral, úgy hogy minden  $j$ -edik sorba menő igényt a 0-adik sorba vezetünk és a 0-adik sorból távozó igények a  $j$ -edik sorba mennek. A módosított sorbanállási hálózat is Gordon-Newell típusú és így szorzat alakú egyensúlyi eloszlással rendelkezik,  $p_{k_0, k_1, \dots, k_N, \sum_{i=0}^N k_i = K} =$

$$\frac{1}{G'} \prod_{i=0}^N h_{k_i}^{(i)}.$$

A 0-adik sor kiszolgálási intenzitása  $\mu_0$ .  $\mu_0 \rightarrow \infty$  esetén a módosított és az eredeti sorbanállási hálózat viselkedése megegyezik és a  $j$ -edik sor igényérkezési pillanatai azok a pillanatok, amikor 1 igény van a 0-adik sorban. Így

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left(K_1 = k_1, \dots, K_N = k_N, \sum_{i=0}^N k_i = K \mid K_0 = 1\right) = \\ & = \frac{\mathbf{P}\left(K_0 = 1, K_1 = k_1, \dots, K_N = k_N, \sum_{i=0}^N k_i = K\right)}{\mathbf{P}(K_0 = 1)} = \\ & = \mathbf{P}\left(K_1 = k_1, \dots, K_N = k_N, \sum_{i=1}^N k_i = K - 1\right). \end{aligned}$$

□

## MVA algoritmus

A konvolúciós algoritmusban a sorok száma növekszik az iterációs lépések során. Ennek párja a MVA algoritmus, ahol a rendszerben lévő igények száma növekszik az iterációs lépések során. Ennek megfelelően a vizsgált mennyiségeket a rendszerben lévő igények számának függvényében jellemezzük. A konvolúciós algoritmussal szemben a MVA algoritmus csak abban az esetben alkalmazható, amikor minden sorban egy kiszolgáló van, azaz  $m_i = 1, i = 1, \dots, N$  és az eljárás eredménye (mint az eljárás neve is utal rá) a sorok átlagos teljesítmény jellemzőinek értéke.

Az  $i$ -edik sorban eltöltött idő várható értéke

$$\mathbf{E}(T_i(K)) = (1 + \mathbf{E}(N_i^*(K))) \frac{1}{\mu_i},$$

ahol  $\mathbf{E}(N_i^*(K))$  az igény érkezéskor a sorban lévő igények várható száma, ami a forgalmi tétel alapján megegyezik az  $i$ -edik sorban lévő igények számának egyensúlyi várható értékével  $K - 1$  felhasználó esetén,  $\mathbf{E}(N_i(K - 1))$ , amiből

$$\mathbf{E}(T_i(K)) = (1 + \mathbf{E}(N_i(K - 1))) \frac{1}{\mu_i}.$$

Másrészt az  $i$ -edik sorban lévő igények számának egyensúlyi várható értéke

$$\mathbf{E}(N_i(K)) = K \frac{\lambda_i \mathbf{E}(T_i(K))}{\sum_{j=1}^N \lambda_j \mathbf{E}(T_j(K))}$$

mivel a valódi érkezési intenzitás az  $i$ -edik sorban a forgalmi egyenlet tetszőleges megoldásának konstans szorosa  $\hat{\lambda}_i = \lambda_i c$ , a Little tétel szerint  $\mathbf{E}(N_i(K)) = \hat{\lambda}_i \mathbf{E}(T_i(K))$  és

$$\begin{aligned} K \frac{\lambda_i \mathbf{E}(T_i(K))}{\sum_{j=1}^N \lambda_j \mathbf{E}(T_j(K))} &= K \frac{\hat{\lambda}_i \mathbf{E}(T_i(K))}{\sum_{j=1}^N \hat{\lambda}_j \mathbf{E}(T_j(K))} = \\ &= K \frac{\mathbf{E}(N_i(K))}{\sum_{j=1}^N \mathbf{E}(N_j(K))} = K \frac{\mathbf{E}(N_i(K))}{K} = \mathbf{E}(N_i(K)) . \end{aligned}$$

Még egyszer alkalmazva a Little tételt azt kapjuk, hogy

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\mathbf{E}(N_i(K))}{\mathbf{E}(T_i(K))} = K \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^N \lambda_j \mathbf{E}(T_j(K))} .$$

Ezzel rendelkezésünkre áll az iteratív eljárás össze eleme.

Kezdeti értékek:

$$\mathbf{E}(N_i(0)) = 0,$$

Iterációs lépés:

$$\mathbf{E}(T_i(K)) = (1 + \mathbf{E}(N_i(K-1))) \frac{1}{\mu_i},$$

$$\mathbf{E}(N_i(K)) = K \frac{\lambda_i \mathbf{E}(T_i(K))}{\sum_{j=1}^N \lambda_j \mathbf{E}(T_j(K))},$$

Záró lépés:

$$\hat{\lambda}_i = \frac{\mathbf{E}(N_i(K))}{\mathbf{E}(T_i(K))} .$$

## 1.7. BCMP hálózatok - több igényosztály és kiszolgálási módszer

A Jackson és a Gordon-Newell sorbanállási hálózatok hatékony számítást lehetővé tevő szorzat alakú megoldással rendelkeznek. A számítógépes rendszerek teljesítményelemzése hosszú ideig alapvetően ezeken a hatékonyan számolható, egyszerű modelleken alapult. Az egyre bonyolultabb rendszerek elemzése azonban felvetette azt a kérdést, hogy mennyire terjeszthető ki a sorbanállási hálózatok viselkedése a Jackson és a Gordon-Newell sorbanállási hálózatok viselkedéséhez képest úgy, hogy az egyensúlyi megoldás szorzat alakja megmaradjon. Az erre vonatkozó kutatások eredményét [1] foglalja össze, és e cikk szerzőinek kezdőbetűivel azonosítják azt a legáltalánosabb hálózat osztályt, amely még szorzat alakú megoldásra vezet.

A BCMP hálózatokban az általánosítás két fő iránya az igény típusok bevezetése, és a kiszolgálási elvek szélesítése.

A BCMP hálózatokban az igényeknek típusa van. Az igények érkezése a külvilágból, kiszolgálása az egyes csomópontokon (kiszolgálási idő eloszlása, kiszolgálási diszciplína) és egy csomópont elhagyása utáni viselkedésük (következő csomópont választási valószínűség, következő csomóponton az igény típusa) függ az igény típusától, de mástól nem. Az  $r$  típusú igények érkezési intenzitása külvilágból az  $i$  csomópontához  $\gamma_{ir}$ . Egy  $r$  típusú igény az  $i$  csomópont elhagyása után  $P_{ir,js}$  valószínűséggel  $s$  típusú igényként jelenik meg a  $j$  csomóponton. Legyen a típusok száma  $C$ . Ekkor

$$\sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^C P_{ir,js} = 1, \quad \forall i = 1, \dots, N, r = 1, \dots, C.$$

A  $\gamma_{ir}$  intenzitások és a  $P_{ir,js}$  átmenet valószínűségek megfelelő beállításával sokféle hálózati terhelés modellezhető, amelyek részletes tárgyalására itt nem térünk ki, csak felsorolunk néhány lehetőséget.

- Független zárt és/vagy nyílt osztályok igényei azonos erőforrásokat használnak:  
 $P_{ir,js} = 0$  ha  $r \neq s$ , azaz nem történhet típus váltás és  $\gamma_{ir} = 0$  ha  $r \leq C_z$  és minden  $r > C_z$  esetén létezik  $i$  hogy  $\gamma_{ir} > 0$ , azaz az első  $C_z$  forgalmi osztály zárt és a többi nyílt.
- A hálózat részeit terhelő igény osztályok:  
 Tekintsük a csomópontok  $i \leq N_z$  és a típusok  $r \leq C_z$  részhalmazait és legyen  $\gamma_{ir} = 0$ , ha  $i > N_z$  és  $r \leq C_z$  és  $P_{ir,js} = 0$  ha  $i \leq N_z$ ,  $j > N_z$  és  $r, s \leq C_z$ . Ebben az esetben az  $r \leq C_z$  típusú forgalmak csak az  $i \leq N_z$  csomópontokat terhelik. Ezzel az eljárással modellezhetjük a hálózat bizonyos részeiben jelen lévő háttérforgalmat.
- Adott számú feladat kiszolgálása egy csomóponton:  
 Számítógépek utasításainak végrehajtása során egy művelet elvégzése több lépésben is igényelhet processzor műveletet, pl: adat címének meghatározása, majd memória hozzáférés után adat feldolgozás. Az ilyen feladatok modellezésére is hatékonyak az igény típusok. Ha egy csomóponton egy 1-es típusú igény kiszolgálás után 2-es típusú igényként megjelenik ugyanannak a csomópontnak a bemenetén, majd a 2-es típusú igény kiszolgálása után távozik a rendszerből, akkor ez az igény pontosan két alkalommal kerül kiszolgálásra a csomóponton.

A BCMP hálózatokban megengedett kiszolgálási elvek a következők.

1. FCFS (first come first served)  
 Érkezési sorrendben szolgálják ki az igényeket. Valamennyi igény kiszolgálási ideje független azonos paraméterű exponenciális eloszlású és így független az igényosztálytól. A kiszolgálás intenzitása függhet a csomópontban lévő összes igények számától.
2. PS (processor sharing)  
 Az igényeket párhuzamosan, a kiszolgáló kapacitást egyenletesen felosztva szolgálják ki. Amikor  $n$  igény van a sorban mindegyik igény kiszolgálása a teljes kiszolgálási sebesség  $1/n$ -ed részével történik. A különböző osztályok kiszolgálási idő eloszlása különbözhet, de mindegyiké racionális függvényű Laplace transzformálttal kifejezhető.

3. LCFS-PR (last come first served preemptive-resume)

Az igényeket egyesével szolgálják ki úgy, hogy az utoljára érkező igény megszakítja az kiszolgálóban lévő igény kiszolgálását (ha érkezéskor volt igény a kiszolgálóban). Az igény távozása után a legutoljára megszakított igény kiszolgálása a megszakítás pillanatától folytatódik. A különböző osztályok kiszolgálási idő eloszlása különbözhet, de mindegyiké racionális Laplace transzformálttal kifejezhető.

4. IS (infinite server)

Mivel végtelen kiszolgáló áll rendelkezésre a csomóponton így minden érkező igénynek külön kiszolgálója van. A különböző osztályok kiszolgálási idejeinek eloszlása különbözhet, de mindegyiké racionális Laplace transzformálttal kifejezhető.

Az igénytípusok bevezetésével a forgalmi egyenlet

$$\lambda_{ir} = \gamma_{ir} + \sum_{j=1}^N \sum_{s=1}^C \lambda_{js} P_{js,ir} \quad (1.12)$$

még nem nagyon bonyolódik el, de a szorzat alakú megoldás leírására már be kell vezetni néhány új jelölést és egy következő összegzést a racionális Laplace transzformálttal rendelkező kiszolgálási idők kezelésére. Ha a kiszolgálási idők eloszlását exponenciálisnak feltételezzük (a kiszolgálási elveknek megfelelő megszorításokkal) és  $\mathbf{N} = \{\mathbf{N}_1, \dots, \mathbf{N}_N\}$  jelöli a rendszer állapotát, azaz az egyes csomópontoknál lévő különböző típusú igények számát,  $\mathbf{N}_i = \{\mathbf{N}_{i1}, \dots, \mathbf{N}_{iC}\}$ , akkor az egyensúlyi eloszlás alakja

$$p_{\mathbf{N}} = \frac{1}{G} \prod_{i=1}^N h_{\mathbf{N}_i}^{(i)}, \quad (1.13)$$

ahol

$$h_{\mathbf{N}_i}^{(i)} = \begin{cases} \frac{N_i!}{\mu_i^{N_i}} \prod_{r=1}^C \frac{1}{N_{ir}!} \lambda_{ir}^{N_{ir}} & \text{ha az } i \text{ csomópont FCFS típusú,} \\ N_i! \prod_{r=1}^C \frac{1}{N_{ir}!} \left( \frac{\lambda_{ir}}{\mu_{ir}} \right)^{N_{ir}} & \text{ha az } i \text{ csomópont PS vagy IS típusú,} \\ \prod_{r=1}^C \frac{1}{N_{ir}!} \left( \frac{\lambda_{ir}}{\mu_{ir}} \right)^{N_{ir}} & \text{ha az } i \text{ csomópont LCFS-PR típusú,} \end{cases}$$

és  $N_i = \sum_{r=1}^C N_{ir}$ .

## 1.8. Nem szorzat alakú megoldásra vezető sorbanállási hálózatok

Bár a BCMP hálózatok elég általános sor viselkedést engednek meg, a gyakorlati példákban sokszor előfordulnak olyan esetek, amelyek nem szorzat alakú megoldásra vezetnek. A leggyakrabban előforduló ilyen esetek

- a nem Poisson érkezési folyamat,

- típusok szerint különböző paraméterű exponenciális eloszlású kiszolgálási idő FCFS kiszolgálóban,
- nem exponenciális eloszlású kiszolgálási idő FCFS kiszolgálóban,
- nem racionális Laplace transzformálttal rendelkező kiszolgálási idő eloszlás,
- véges tárolóval rendelkező sorok.

Teljesen általános érkezési, igény továbbítási vagy kiszolgálási folyamat esetén a rendszer csomópontjaiban lévő különböző típusú igények száma nem Markov lánc. Amennyiben viszont az érkezési, igény továbbítási és kiszolgálási folyamat csak a rendszer csomópontjaiban lévő különböző típusú igények számától függ, akkor rendszer viselkedése egy bonyolult stuktúrájú Markov lánc, aminek egyensúlyi eloszlása nem szorzat alakú. Általában az ilyen Markov láncok analízise egzakt numerikus módszerekkel nem megoldható, így közelítő módszereket szoktak alkalmazni. A közelítő módszerek többsége pedig éppen úgy elemzi a rendszert, mintha teljesülne a szorzat alakú megoldás feltétele.

A közelítő analízis módszerek közül mi a forgalom alapú dekompozíció elvét ismertetjük.

## 1.9. Forgalom alapú dekompozíció

A szorzat alakú megoldás kiszámítása gyakorlatilag a hálózat sorainak különálló elemzését jelenti a forgalmi egyenletből ismert forgalmi terhelés mellett. A forgalom alapú dekompozíció egy iteratív eljárás, amelyben szintén a hálózat sorainak különálló elemzése történik, de a forgalmi terhelést a külvilágból érkező ismert forgalmak, és az iteráció megelőző lépésének eredménye alapján számítjuk.

Az eljárás előnye a flexibilitás és az alacsony számítás igény. Hátránya, hogy nincs általános eredmény az eljárás konvergenciájának bizonyítására, és a számítás hibájára. E hátrányok ellenére a gyakorlatban sokszor használják ezt a közelítést, mert általában konvergál és szimulációs vizsgálatok alapján elfogadható pontosságú eredményeket szolgáltató, amikor más eljárással nem számítható a rendszer.

Az iteratív eljárás sorra veszi a hálózat csomópontjait és minden csomópontra elvégzi a következő lépéseket:

- forgalom aggregálás:  
a csomópontra a külvilágból és a többi csomópontból érkező forgalmak aggregálása
- csomópont analízise és kimenő folyamat közelítés:  
a csomópont analízise alapján a csomópont igénytávozási folyamatának számítása/közelítése
- forgalom szűrés:  
az egyes következő csomópontokhoz menő forgalom összetevők meghatározása.

Egy iterációs lépés bonyolultsága és az eredmények pontossága függ a választott forgalom leírótól. Az eljárás flexibilitása annak köszönhető, hogy a forgalom leíró aránylag szabadon választható. A legegyszerűbb forgalom leírás a csomópontok között Poisson folyamat feltételezése. Több forgalmi osztály esetén már ennek az elemzése sem triviális. A csomópontok igény távozási időközeinek magasabb momentumaival, illetve az igény távozási folyamat függőségeinek figyelembe vételével tovább finomítható a forgalom leírás és ezzel együtt az eredmények pontossága.



# Irodalomjegyzék

- [1] F. Baskett, K. Mani Chandy, R. R. Muntz, F. G. Palacios. Open, closed and mixed networks of queues with different classes of customers. *Journal of the ACM*, 22:248–260, 1975.
- [2] Paul J. Burke. The output of a queuing system. *Operations Research*, 4:699–704, 1956.
- [3] Jeffrey Buzen. Computational algorithms for closed queueing networks with exponential servers. *Communications of the ACM*, 16:527–531, 1973.
- [4] William J. Gordon, Gordon F. Newell. Closed queueing systems with exponential servers. *Operations Research*, 15:254–265, 1967.
- [5] James R. Jackson. Jobshop-like queueing systems. *Management Science*, 10:131–142, 1963.
- [6] M. Reiser, S. S. Lavenberg. Mean value analysis of closed multi-chain queueing networks. *Journal of the ACM*, 27:313–322, 1980.