Teljesítményelemzés

vizsga

2007.12.19.

Elméleti kérdések:

1. Milyen módon lehet az M/M/1 sort modellező Markov-láncot kiterjeszteni úgy, hogy többlépcsős és csoportos érkezést illetve kiszolgálást is tudjon modellezni? (10p)

   Többlépcsős érkezés illetve kiszolgálás: M/PH/1 illetve PH/M/1 sorokrol tanultak
   Csoportos érkezés illetve kiszolgálás: születési halálozási markov lánc kiegészítve minden állapotból több állapotot előre illetve hátra ugró átmenetekkel.

2. Mikor nevezünk memóriamentesnek egy eloszlást? Bizonyítsa be, hogy az exponenciális eloszlás memóriamentes! (10p)

   Ha tetszőleges pillanatban a hátralévő idő eloszlása megegyezik az eredeti eloszlással. Ha $Y = X - x | X > x$ *akkor*

$$F_Y(y) = Pr(Y < y) = Pr(X - x < y | X > x) = \frac{Pr(x < X < x + y)}{Pr(X > x)} = \frac{F_X(x + y) - F_X(x)}{1 - F_X(x)}$$

$$= \frac{1 - e^{-\lambda(x+y)} - 1 + e^{-\lambda x}}{1 - 1 + e^{-\lambda x}} = 1 - e^{-\lambda y} = F_X(y)$$

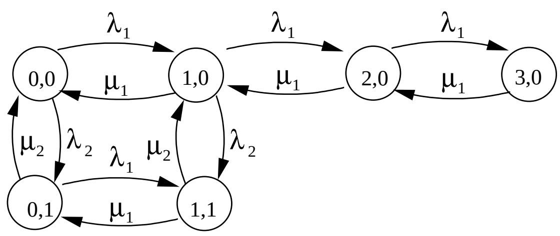
3. Ismertesse a sorbanállási rendszerek Kendall-féle jelölésrendszerét! (10p)

   Jegyzet.

Gyakorlati feladatok:

4. Egy 3 kapacitású csatornába kétféle igény érkezhet. Az 1-es típusú igények érkezési intenzitása $\lambda_1 = 5$ igény/sec, kiszolgálási intenzitása $\mu_1 = 8$ igény/sec. A 2-es típusú igények érkezési intenzitása $\lambda_2 = 3$ igény/sec, kiszolgálási intenzitása $\mu_2 = 2$ igény/sec. Az 1-es típusú igények a csatorna teljes kapacitásából 1 egységet, a 2-es típusúak 2 egységet foglalnak. Ha az igény érkezésekor nem áll rendelkezésre a számára szükséges mennyiségű csatorna-kapacitás, akkor az igényt elveszettnek tekintjük. A rendszerbe sikeresen bejutó igények kiszolgálása párhuzamosan történik. ($\sum$ 38p)

   a. Rajzolja fel a rendszer viselkedését modellező állapotgráfot! (8p)



   b. Irreducibilis-e a kapott Markov-lánc? (2p)
   igen

   c. Számítsa ki a rendszer állapotainak egyensúlyi valószínűségeit! (7p)

   d. Átlagosan hány 1-es, ill. hány 2-es típusú igény tartózkodik a rendszerben? (7p)

$$E(N_1) = p_{1,1} + \sum_{i=1}^{3} i p_{0,i} \,; E(N_2) = p_{1,1} + p_{1,0} \,.$$

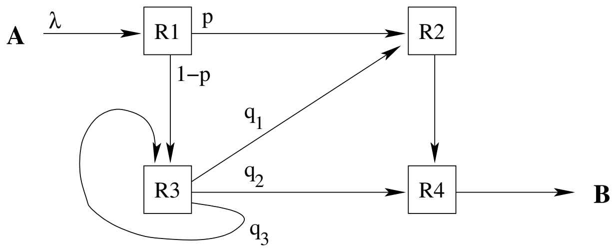
e. Mekkora az átlagos csatorna-kihasználtság? (7p)

$$\rho = \frac{1}{3}\, p_{0,1} + \frac{2}{3}\, (p_{0,2} + p_{1,0}) + p_{1,1} + p_{0,3}$$

f. Mekkora az igényvesztés valószínűsége? (7p)

$$p_{loss} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2}\, (p_{0,2} + p_{1,0}) + p_{1,1} + p_{0,3}$$

5. Egy csomagkapcsolt távközlő hálózatban az "A"-val jelölt felhasználó csomagjai az ábrán látható módon összekötött csomópontokon keresztül jutnak el "B"-hez:



Az élek fölé írt útvonalválasztási valószínűségek a következők: $p = 0.3, q_1 = 0.2, q_2 = 0.5, q_3 = 0.3$. Az "A" felhasználó $\lambda = 40$ intenzitású Poisson folyamat szerint generálja a csomagokat. Az 1-3 csomópontokban a csomagok exponenciális eloszlású kiszolgálási időben részesülnek, $\mu_1 = 90, \mu_2 = 35, \mu_3 = 100$ paraméterekkel. A negyedik csomópontban kétlépcsős a kiszolgálás: az első lépcső $\mu_4 = 400$ intenzitású exponenciális eloszlású, a második lépcső pedig egy $D = 0.01$ determinisztikus hosszúságú ideig tart. ($\sum$ 32p)

a. Mekkora az egyes csomópontok teljes bemenő forgalma? (8p)
A forgalmi egyenletek,

$$\lambda_1 = \lambda;\ \lambda_2 = p\lambda_1 + q_1\lambda_3;\ \lambda_3 = (1-p)\lambda_1 + q_3\lambda_3;\ \lambda_4 = \lambda_2 + q_2\lambda_3;$$

megoldása az adott valószínűségek mellett: $\{\lambda, \lambda/2, \lambda, \lambda\}$.

b. Mekkora a 4-es csomópont kiszolgálási idejének átlaga és relatív szórásnégyzete? (8p)
A kiszolgálási idő $Y = X + D$, ahol X exponenciális és D determinisztikus.

$$c^2 = \frac{\sigma^2(Y)}{E^2(Y)} = \frac{\sigma^2(X) + \sigma^2(D)}{E^2(X+D)} = \frac{(1/400)^2 + 0}{(1/400 + 1/100)^2} = \frac{1}{25}$$

c. Átlagosan mennyi időt töltenek a csomagok az egyes csomópontokban? (8p)
Ha kiszolgálási idő S_i, a kihasználtság ρ_i és a relatív szórásnégyzet C_i^2, akkor

$$E(T) = E(S_i) + \frac{\rho_i}{1-\rho_i}\, E(S_i)\, \frac{1 + C_i^2}{2},$$

ahol $\rho_i = \lambda_i E(S_i)$.

d. Legfeljebb milyen nagy lehet λ, hogy minden csomóponti buffer stabil maradjon? (8p)
Az a legkisebb λ, amire $\rho_i < 1, \forall i \in \{1,2,3,4\}$,
ahol $\rho_i = \lambda_i/\mu_i, \forall i \in \{1,2,3\}$ és $\rho_4 = \lambda_4(1/\mu_4 + D)$.

Teljesítményelemzés
vizsga

2008. január 3.

Elméleti kérdések:

1. Sorolja fel a Poisson folyamat összes tanult tulajdonságát! Ahol tudja mutassa meg e tulajdonságok kapcsolatát!

   - t idő alatt az érkezések számának eloszlása λt paraméterű Poisson eloszlású
   - δt idő alatt 0 érkezés valószínűsége $1 - \lambda\delta t + \sigma(\delta t)$, 1 érkezés valószínűsége $\lambda\delta t + \sigma(\delta t)$, több mint 1 érkezés valószínűsége $\sigma(\delta t)$
   - érkezési időközök független λ paraméterű exponenciális eloszlásúak

   - független Poisson folyamatok összege Poisson folyamat
   - Poisson folyamat független p valószínűségű szürése Poisson folyamat

   Tulajdonságok kapcsolata:
   - minden δt intervallumban azonos az érkezés valószínűsége $\rightarrow$ örökifjú érkezési időköz $\rightarrow$ exponenciális eloszlású érkezési időköz
   - exponenciális eloszlású érkezési időköz $\rightarrow$

   $$P(\text{0 érkezés } t \text{ idő alatt}) = P(\text{első érkezés} > t) = e^{-\lambda t},$$

   $$P(\text{1 érkezés } t \text{ alatt}) = P(\text{érkezés } x\text{-ben, utánna nincs érkezés}) = \int_{x=0}^{t} \lambda e^{-\lambda x} e^{-\lambda(t-x)} dx = \lambda t e^{-\lambda t},$$

   $$\ldots$$

   - δt idő alatti viselkedés a Poisson eloszlás alapján:
   0 érkezés valószínűsége: $e^{-\lambda\delta t} = \sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda\delta t)^i / i!$ Taylor sora: $1 - \lambda\delta t + \sigma(\delta t)$
   1 érkezés valószínűsége: $\lambda\delta t e^{-\lambda\delta t}$ Taylor sora: $\lambda\delta t + \sigma(\delta t)$

   $$\ldots$$

2. Ismertesse és bizonyítsa be a Little formulát!

   Előadás foliák.

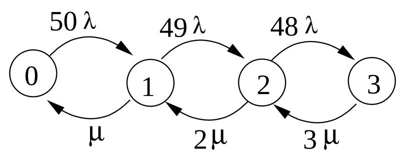
3. Mi az Erlang-C formula jelentése? Milyen sorbanállási rendszerhez kapcsolódik ez a formula és hogyan?

   Várakozás valószínűsége az M/M/m sorban. A várakozás valószínűsége a sort leíró Markov lánc $m, m+1, m+2, \ldots$ állapotainak valószínűségösszege.

Gyakorlati feladatok:

4. Egy vállalatnál 50 alkalmazott dolgozik. Mindegyikük átlagosan 1 óránként telefonhívást kezdeményez, mely átlagosan 2 percig tart (mindkét időtartam exponenciális eloszlású). A vállalat telefonközpontja egyidejűleg 3 hívást képes lebonyolítani, hívást várakoztatni pedig nem tud.

   a. Rajzolja fel a rendszer viselkedését modellező Markov-lánc állapotgráfját!



   ahol, $\lambda = 1/60$ *1/perc,* $\mu = 2$ *1/perc.*

   b. Stabil ez a Markov-lánc?
   Igen, mivel irreducibilis és véges.

   c. Számítsa ki a Markov-lánc állapotainak egyensúlyi valószínűségeit!
   Egyensúlyi egyneletek: $50\lambda p_0 = \mu p_1$, $49\lambda p_1 = 2\mu p_2$, $48\lambda p_2 = 3\mu p_3$, $p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1$, *amiből*

$$p_0 = \frac{1}{1 + \frac{50\lambda}{\mu} + \frac{50\lambda}{\mu}\frac{49\lambda}{2\mu} + \frac{50\lambda}{\mu}\frac{49\lambda}{2\mu}\frac{48\lambda}{3\mu}}, \quad p_1 = \frac{\frac{50\lambda}{\mu}}{1 + \frac{50\lambda}{\mu} + \frac{50\lambda}{\mu}\frac{49\lambda}{2\mu} + \frac{50\lambda}{\mu}\frac{49\lambda}{2\mu}\frac{48\lambda}{3\mu}},$$

$$p_2 = \frac{\frac{50\lambda}{\mu}\frac{49\lambda}{2\mu}}{1 + \frac{50\lambda}{\mu} + \frac{50\lambda}{\mu}\frac{49\lambda}{2\mu} + \frac{50\lambda}{\mu}\frac{49\lambda}{2\mu}\frac{48\lambda}{3\mu}}, \quad p_3 = \frac{\frac{50\lambda}{\mu}\frac{49\lambda}{2\mu}\frac{48\lambda}{3\mu}}{1 + \frac{50\lambda}{\mu} + \frac{50\lambda}{\mu}\frac{49\lambda}{2\mu} + \frac{50\lambda}{\mu}\frac{49\lambda}{2\mu}\frac{48\lambda}{3\mu}}.$$

   d. Átlagosan hány hívás zajlik egyszerre a telefonközpontban?
   $E(X) = 0\ p_0 + 1\ p_1 + 2\ p_2 + 3\ p_3$.

   e. Mekkora a telefonközpont kihasználtsága?
   $\rho = 0\ p_0 + 1/3\ p_1 + 2/3\ p_2 + 1\ p_3$.

   f. Mekkora a hívás-visszautasítás valószínűsége?
   $$p_{loss} = \frac{47\lambda p_3}{50\lambda p_0 + 49\lambda p_1 + 48\lambda p_2 + 47\lambda p_3}.$$

   g. Mekkora a hívás-visszautasítás valószínűsége, ha mindig állandó, 50 hívás/óra, a híváskezdeményezési intenzitás? Hogyan viszonyul ez az eredmény az f. kérdés eredményéhez, miért?
   Állandó érkezési intenzitás mellett M/M/3/3 sort kapunk, aminek veszteségét az Erlang-B formula adja $p_{loss} = B(50\lambda/\mu, 3)$.
   Mivel ebben az esetben azonos kiszolgálási viszonyok mellett nagyobb az érkezési intenzitás (az 1-es, 2-es és 3-as állapotokban), ezért nagyobb a veszteség is.

5. Egy hálózati kiszolgáló végtelen bufferébe 3 forrásból érkeznek csomagok, Poisson folyamat szerint, sorra $\lambda_1 = 0.5, \lambda_2 = 0.6, \lambda_3 = 0.7$ igény/ms intenzitással. A csomagok összetett kiszolgálást kapnak, mely 3 lépcsőből áll. Az első lépcső exponenciális eloszlású ideig tart 5 ms átlaggal. A második lépcső ideje is exponenciális eloszlású, de annak átlagos hossza 0.6 valószínűséggel 8 ms, 0.4 valószínűséggel 4 ms. A harmadik lépcső hossza szintén exponenciális eloszlású 10 ms átlaggal.

   a. Számítsa ki az aggregált érkezési intenzitást!
   $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$.

   b. Számítsa ki a teljes kiszolgálási idő átlagát és relatív szórásnégyzetét!
   Legyenek az exponenciális val. vátozók X_1, X_{21}, X_{22}, X_3.

$$E(S) = E(X_1) + p\ E(X_{21}) + (1-p)E(X_{22}) + E(X_3) = 5 + 0.6\ 8 + 0.4\ 4 + 10 = 21.4,$$

$$\sigma^2(S) = \sigma^2(X_1) + \underbrace{(p\ E(X_{21}^2) + (1-p)E(X_{22}^2)) - (p\ E(X_{21}) + (1-p)E(X_{22}))^2}_{\sigma^2(2.\ fázis)} + \sigma^2(X_3),$$

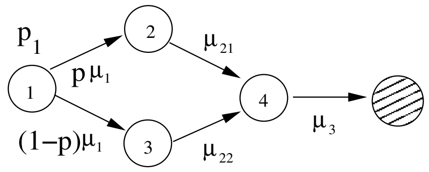
$$= 5^2 + (0.6\ 2\ 8^2 + 0.4\ 2\ 4^2) - (0.6\ 8 + 0.4\ 4)^2 + 10^2 = 173.66$$

$$c^2 = \frac{\sigma^2(S)}{E^2(S)} = \frac{173.66}{21.4^2} = 0.37916.$$

   c. Számítsa ki az egyes felhasználók csomagjai által a bufferben töltött várakozási idő átlagát!
   Ha stabil a rendszer $E(W) = \frac{\rho}{1-\rho}E(S)\ \frac{1+C^2}{2}$, *de itt* $\lambda E(S) > 1$, *így* $E(W) = \infty$.

   d. Számítsa ki az összes rendszerben lévő igény átlagos számát!
   Ha stabil a rendszer $E(X) = \rho + \rho^2\ \frac{1+C^2}{2(1-\rho)}$, *de itt* $\lambda E(S) > 1$, *így* $E(X) = \infty$.

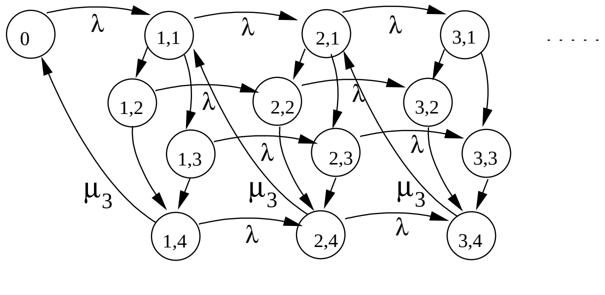
   e. Adja meg a kiszolgálási idő PH reprezentációját!



   ahol, $p = 0.6$, $\mu_1 = 1/5$ *1/ms,* $\mu_{21} = 1/8$ *1/ms,* $\mu_{22} = 1/4$ *1/ms,* $\mu_3 = 1/10$ *1/ms és a kezdeti valószínűség* $p_1 = 1$. *Így*

$$\alpha = \{1, 0, 0, 0\}, \quad A = \begin{pmatrix} -1/5 & 3/25 & 2/25 & 0 \\ 0 & -1/8 & 0 & 1/8 \\ 0 & 0 & -1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & -1/10 \end{pmatrix}$$

   f. Adja meg a buffer viselkedését modellező Markov-lánc szerkezetét?



Teljesítményelemzés

vizsga

2008. jan. 16.

Elméleti kérdések:

1. Mi az $F_X(x)$ eloszlású valószínűségi változó t-től hátralévő idejének eloszlása?

   A t-től hátralévő idő $Y = X - t|X > t$, és ennek eloszlása

   $$F_Y(x) = Pr(Y < x) = Pr(X - t < x|X > t) = \frac{Pr(t < X < t + x)}{Pr(X > t)} = \frac{F_X(t + x) - F_X(t)}{1 - F_X(t)}$$

   Milyen elszolás ez, ha X (folytonos) egyenletes eloszlású az (a, b) intervallumon, és $a < t < b$.

   Ebben az esetben $F_X(x) = \frac{x-a}{b-a}$ ha $x \in (a, b)$, így ha $t \in (a, b)$ és $x \in (0, b - t)$ akkor

   $$F_Y(x) = \frac{F_X(t + x) - F_X(t)}{1 - F_X(t)} = \frac{\frac{t+x-a}{b-a} - \frac{t-a}{b-a}}{1 - \frac{t-a}{b-a}} = \frac{(t + x - a) - (t - a)}{(b - a) - (t - a)} = \frac{x}{b - t}.$$

   Azaz egyenletes eloszlású a hátralévő idő.

2. Milyen módszereket ismer a szimulációs programok jövőbeli eseményeinek kezelésére?

   előadas fóliák

3. Mit jelent a folytonos idejű Markov láncok körében az irreducibilitás és a visszatérőség? Hogyan kapcsolódnak ezek a tulajdonságok a stabilitáshoz?

   Irreducibilitás: minden állapotból minden állapotba el lehet jutni, visszatárőség: minden állapotba idővel 1 valószínűséggel visszatér a Markov lánc, pozitív visszatárőség: minden állapotba véges várható értékű idővel tér vissza a Markov lánc.
   Stabilitás: irreducibilis, pozitív visszatárő Markov lánc $\Leftrightarrow$ stabil

Gyakorlati feladatok:

4. Tegyük fel, hogy hálózati eszközünk az egyetem VOIP hívásait továbbítja a külső hálózat felé. A VOIP csomagok méréseink szerint átlagosan 2 ms -onként érkeznek, és az érkezési időközök exponenciális eloszlásúak. A csomagok mérete szintén exponenciális eloszlású, átlagosan 100 byte. A hálózati eszköz egy 1024 kbps sebességű vonalra továbbítja a csomagokat. (1024 kbps = 128 byte/ms). A jobb minőség érdekében nem dobunk el egyetlen csomagot sem.

   a. Milyen tanult sorbanállási rendszerrel vizsgálható a rendszer teljesítménye?

      M/M/1

   b. Átlagosan mennyi ideig tart egy csomag továbbítása?

      $E(S) = \frac{100[byte]}{128[byte/ms]} = \frac{100}{128}[ms]$

   c. Rajzolja fel a rendszert modellező Markov láncot!

      M/M/1 sor úgy hogy $\lambda = 0,5[1/ms]$, $\mu = 1.28[1/ms]$.

   d. Mekkora a hálózati eszköz terhelése (kihasználtsága)?

   $$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0.5[1/ms]}{1.28[1/ms]} = 0.39[1/ms].$$

e. Átlagosan mennyi időt töltenek a VOIP csomagok a bufferben?

$$E(W) = E(T) - E(S) = \frac{1}{\mu - \lambda} - \frac{1}{\mu} = 0,5[ms].$$

f. Átlagosan hány VOIP csomag vár feldolgozásra az eszközben?

$$E(X_W) = \lambda E(W) = 0,25.$$

g. Maximum mekkora lehet az érkezési intenzitás, ha megköveteljük, hogy a csomagok rendszerben töltött ideje 120 ms alatt maradjon?

$E(T) = \frac{1}{\mu-\lambda} < 120[ms]$, *amiből* $\lambda < \mu - \frac{1}{120[ms]} = 1,2716[1/ms]$.

5. Egy 5 kbps kapacitású link CBR és ABR igényeket szolgál ki. A CBR igények λ_1 [1/s] intenzitással érkeznek, 2 kbps kapacitást foglalnak és μ_1 [1/s] paraméterű exponenciális eloszlású ideig tartózkodnak a rendszerben, míg az ABR igények λ_2 [1/s] intenzitással érkeznek és μ_2 [1/kb] paraméterű exponenciális eloszlású adatmennyiséget továbbítanak. A rendszer legfeljebb 2 ABR igényt engedélyez és az ABR igények azonosan részesednek az rendelkezésre álló kapacitásból. A CBR igényeket a rendszer mindig beengedi, ha lehetséges.

a. Rajzolja fel a rendszert modellező Markov láncot ha $\lambda_2 = 0$!

3 állapot (0,1,2) igény. Átmenetek $0 \to 1 : \lambda_1$, $1 \to 2 : \lambda_1$, $1 \to 0 : \mu_1$, $2 \to 1 : 2\mu_1$.

b. Rajzolja fel a rendszert modellező Markov láncot ha $\lambda_1 = 0$!

3 állapot (0,1,2) igény. Átmenetek $0 \to 1 : \lambda_2$, $1 \to 2 : \lambda_2$, $1 \to 0 : \nu_2 = C\ \mu_2 = 5\mu_2$, $2 \to 1 : 2\mu_1$.

c. Rajzolja fel a (teljes) rendszert modellező Markov láncot! (Továbbiakban feltételezze, hogy ennek a Markov láncnak az egyensúlyi eloszlása ismert.) *9 állapot [#CBR,#ABR] (0,0; 0,1; 0,2; 1,0; 1,1; 1,2; 2,0; 2,1; 2,2). GRÁF amint kész lesz!*

d. Mekkora a (teljes) rendszer kihasználtsága?

$$\rho = 1 - p_{0,0} - \frac{3}{5}p_{1,0} - \frac{1}{5}p_{2,0}.$$

e. Mekkora a CBR veszteség?

$$loss_{CBR} = p_{2,0} + p_{2,1} + p_{2,2}.$$

f. Mekkora az ABR veszteség?

$$loss_{ABR} = p_{0,2} + p_{1,2} + p_{2,2}.$$

g. Mekkora a ABR igények átlagos kiszolgálási ideje?

Többféle képpen is lehet, pl. Little tétel alapján:

$$E(T_{ABR}) = \frac{1}{\lambda_2}E(N_{ABR}),\ \textit{ahol}\quad E(N_{ABR}) = p_{1,1} + p_{2,1} + 2p_{1,2} + 2p_{2,2}.$$